2-दूरीक, 2-बानाख़
एवं सांस्थितिकतः सदिश समष्टियों में अमूर्त संपात तथा स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन का अस्तित्व

गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय

की

पी-एच०डी० (गणित)

उपाधि हेतु प्रस्तुत

शोध-प्रबंध

शोध निर्देशक
डॉ० श्याम लाल सिंह
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष

प्रस्तुत कर्ता
देवेन्द्र दत्त शर्मा

गणित विभाग
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार 249 404

नामांकन संख्या 86010

जनवरी 1991

2-दूरीक, 2-बानाख एवं सांस्थितिकत: सदिश समष्टियों में अमूर्त संपात तथा स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन का अस्तित्व

गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय

की

पी-एच०डी० (गणित)

उपाधि हेतु प्रस्तुत

शोध-प्रबंध

शोध निर्देशक
डॉ० श्याम लाल सिंह
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष

प्रस्तुत कर्ता
देवेन्द्र दत्त शर्मा

गणित विभाग
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार 249 404

नामांकन संख्या 86010 **जनवरी** 1991

2-दूरीक, 2-बानाख़ एवं सांस्थितिकत: सदिश समष्टियों में अमूर्त संपात तथा स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन का अस्तित्व

गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय

की

पी-एच०डी० (गणित)

उपाधि हेतु प्रस्तुत

शोध-प्रबंध

शोध निर्देशक
डॉ० श्याम लाल सिंह
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष

प्रस्तुत कर्ता
देवेन्द्र दत्त शर्मा

गणित विभाग
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार 249 404

नामांकन संख्या 86010

जनवरी 1991

2-दूरीक, 2-बानाख़ एवं सांस्थितिकतः सदिश समष्टियों में अमूर्त संपात तथा स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन का अस्तित्व

गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
की
पी-एच०डी० (गणित)
उपाधि हेतु प्रस्तुत

शोध-प्रबंध

शोध निर्देशक
डॉ० श्याम लाल सिंह
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष

प्रस्तुत कर्ता
देवेन्द्र दत्त शर्मा

गणित विभाग
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार 249 404

नामांकन संख्या 86010

जनवरी 1991

प्रमाण पत्र

मैं प्रमाणित करता हूँ कि मैंने "2-धूरीक, 2-बानाख एवं सांख्यिकतः सविश समष्टियों में अमूर्त संपात तथा स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन का अस्तित्व" शीर्षक शोध-प्रबंध प्रोफेसर श्याम लाल सिंह के निर्देशन में तैयार किया है. विश्वविद्यालय नियमों के अंतर्गत यह शोध-प्रबंध किसी अन्य उपाधि के लिये प्रयुक्त नहीं हुआ है.

दिनांक 30 जनवरी 1991

देवेन्द्र दत्त शर्मा
देवेन्द्र दत्त शर्मा
अनुसंधित्सु

अनुसंधित्सु का कथन सत्य है. परीक्षणार्थ संस्तुत एवं अग्रसारित.

दिनांक जनवरी 1991

डॉ० श्याम लाल सिंह
प्रोफेसर एवं अध्यक्ष
गणित विभाग
गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय
हरिद्वार 249404

अ नु क्र म णि का

प्राक्कथन

शिवालिक पर्वत श्रेणियों की उपत्यका में बसे ऋषिकेश नगर के राजकीय महाविद्यालय में जब प्रो० डॉ० श्याम लाल सिंह (संप्रति प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, गणित विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार) गणित विभाग के अध्यक्ष पद पर कार्य कर रहे थे, तब से उनके शोध छात्रों की अन्वेषण वृत्ति तथा गुरुनिष्ठा से अभिभूत मैं सदैव सोचा करता था कि क्या कभी मैं भी उनकी सन्निधि में बैठ कर अपनी शोध पिपासा शान्त कर सकूंगा ?

भारतीय गणित विज्ञान में श्रद्धेय प्रोफेसर साहब की गहरी पैठ उनके निकट आने वाले हर शोधार्थी में राष्ट्रीय अस्मिता और भारतीय ज्ञान-विज्ञान की विशिष्ट उपलब्धियों के प्रति गौरवपूर्ण जानकारी का भाव जगाती है. यही सोच कर जब मैं गुरुवर प्रो० सिंह से मिला तो उन्होंने मुझे उदारतापूर्वक अपने निर्देशन में ले लिया और गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय में हिंदी माध्यम से गणित पर अनुसंधान कार्य करने की प्रेरणा दी.

माननीय प्रो० सिंह तथा माननीया श्रीमती सिंह ने अक्षय वात्सल्य देकर जहाँ मेरा मनोबल बढ़ाया, वहाँ एक कठिन कार्य संपन्न कराने में निष्काम सहायता भी की.

जहाँ तक गणित जैसे क्लिष्ट विषय का राष्ट्रभाषा हिंदी के माध्यम से लेखन का प्रश्न है, जब मैं 1986 में शोध कार्य प्रारंभ कर रहा था तब तक हिंदी भाषा के माध्यम से विज्ञान विषयक शोध प्रबंधों के लेखन की चर्चा तक न थी. प्रोफेसर सिंह के ही निर्देशन में श्री विजयेन्द्र कुमार (हरिद्वार) और मैंने लगभग एक साथ शोध कार्य प्रारंभ किया था. इसके बाद उनके निर्देशन में कई महत्वपूर्ण शोध प्रपत्र एवं दो शोध प्रबंध हिंदी में लिखे गये. उसी श्रृंखला में यह तीसरा शोध प्रबंध है; एतद् विषयक हिंदी में हुए कार्य का उल्लेख शोध प्रबंध के अंत में दिये गये 'निर्देश' में अनुस्यूत है.

प्रस्तुत शोध प्रबंध में केंद्रीय हिंदी निदेशालय (शिक्षा विभाग) द्वारा प्रकाशित "हिंदी वर्तनी मानकीकरण" शीर्षक पुस्तिका में संस्तुत निर्देशों का भरसक पालन करने का प्रयत्न किया गया है. नई पद्धति के अनुसार अब शब्दों को इस प्रकार लिखा जा सकेगाः जैसे विद्या को विद्‌या, यद्यपि को यद्‌यपि, द्वितीय को द्‌वितीय आदि. यद्‌यपि पुस्तिका में पूर्ण विराम के स्थान पर खड़ी पाई (।) प्रयोग करने का निर्देश है परन्तु इस शोध प्रबंध में तकनीकी कारणों से अंग्रेजी के पूर्ण विराम (.) का प्रयोग किया जा रहा है. प्रस्तुत शोध प्रबंध में वैज्ञानिक तकनीकी शब्दावली आयोग, भारत सरकार द्‌वारा प्रकाशित बृहत् पारिभाषिक शब्दावली का उपयोग किया गया है. पाठकों की सुविधा के लिए कुछ प्रयुक्त तकनीकी शब्दों की सूची अंत में दी गई है. इस सूची में ऐसे तकनीकी शब्द भी हैं जो हाल ही में पारिभाषित हुए हैं. वस्तुतः इन शब्दों के हिंदी रूपांतरण प्रो0 सिंह द्‌वारा सुझाये गये हैं.

<u>अभिकलित्र (कंप्यूटर) द्‌वारा टंकण में शून्य (0) के स्थान पर इस पूरे शोध प्रबंध में 0 का टंकण स्वीकार करना पड़ा है.</u> इस प्रकार के किसी अन्य गणितीय चिह्न का प्रयोग नहीं किया गया है.

मैं प्रस्तुत शोध प्रबंध के निर्देशक पूज्यपाद गुरुवर डॉ0 श्याम लाल सिंह प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, गणित विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्‌यालय, हरिद्‌वार का नतशिर हार्दिक आभार स्वीकार करता हूँ. उनके समुचित निर्देशन, शिष्य वत्सलता, उत्साहवर्धक प्रेरक प्रसंगों एवं हर प्रकार से की गई सहायता के फलस्वरूप ही मैं यह शोध प्रबंध तैयार करने में समर्थ हो सका.

मैं इस अवसर पर प्रोफेसर सुरेश चंद्र त्यागी, प्राचार्य, विज्ञान महाविद्यालय, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्‌वार का इस अध्ययन के दौरान उत्साह वर्धन एवं प्रेरणा के लिए अत्यंत आभारी हूँ.

मैं गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय में प्रो० विष्णु दत्त 'राकेश', अध्यक्ष, हिंदी विभाग, श्री विजयेन्द्र कुमार, रीडर, गणित विभाग तथा डॉ० एच० एल० गुलाटी व डॉ० उमेश चंद्र गैरोला, प्रवक्ता, गणित विभाग के विशेष सहयोग एवं सहानुभूति के प्रति अत्यंत कृतज्ञ हूं.

मैं उन सभी विद्वानों का आभार स्वीकार करता हूँ जिनकी रचनाओं से परोक्ष एवं प्रत्यक्ष रूप से लाभान्वित हुआ हूँ. गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय के संस्थापक महर्षि दयानंद के शिष्य और राष्ट्रपिता महात्मा गांधी के सहयोगी, स्वामी श्रद्धानंद जी महाराज का सर्वोपरि कृतज्ञ हूँ, जिन्होंने भारतीय संस्कृति को भावी पीढ़ी के लिए संरक्षित रखने के लिए इस अद्वितीय राष्ट्रीय शिक्षा मंदिर का निर्माण किया.

मैं अपनी पूज्य माता एवं परिवार जनों का आभार शब्दों में कैसे व्यक्त करूं? उनके स्नेह, सहयोग एवं आशीर्वाद की छत्रछाया में ही मैं अध्ययन कर पाया हूँ.

अंत में टंकक श्री सतीश कुमार त्यागी, विकास एवं योजना कार्यालय, रुड़की विश्वविद्यालय का इस शोध प्रबंध के टंकण एवं समंजन के लिए हार्दिक धन्यवाद करता हूँ.

हरिद्वार
दिनांक २० जनवरी 1991

देवेन्द्र दत्त शर्मा
देवेन्द्र दत्त शर्मा

प्रथम अध्याय

भूमिका

इस परिचयात्मक अध्याय में जर्मन गणितज्ञ एस० गह्लर द्वारा अन्वेषित 2-दूरीक, 2-मानकित एवं 2-बानाख़ समष्टियों का संक्षिप्त विवरण दिया गया है. दूसरे एवं तीसरे अनुभागों में बानाख संकुचन सिद्धांत एवं युंक संकुचन सिद्धांत और इनके प्रमुख व्यापकीकरणों का उल्लेख किया गया है. अंतिम अनुभाग में शेष अध्यायों में संपादित कार्य का संक्षिप्त विवरण अनुस्यूत है. वस्तुतः यह अध्याय निम्न चार अनुभागों में विभक्त है:

1. 2-दूरीक, 2-मानकित एवं 2-बानाख़ समष्टियां
2. बानाख संकुचन सिद्धांत एवं इसके कुछ व्यापकीकरण
3. युंक संकुचन सिद्धांत
4. आगामी अध्यायों की संक्षिप्त रूपरेखा

1

2-दूरीक, 2-मानकित एवं 2-बानाख समष्टियां

ऐसा प्रतीत होता है कि सन् 1928 में प्रकाशित प्रोफेसर के० मेंगर के एक शोध प्रपत्र [116] से प्रेरणा प्राप्त कर जर्मन गणितज्ञ प्रोफेसर एस० गह्लर [58]-[61] ने दूरीक एवं मानकित समष्टियों के द्विविमीय सादृश्य प्रस्तुत किये जिन्हें क्रमशः 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों के नाम से जाना जाता है. यक्लिड् समष्टि में तीन विंदुओं द्वारा निर्धारित त्रिभुज के क्षेत्रफल के गुण-धर्मों की शुद्ध गणितीय व्याख्या करने वाली इन समष्टियों पर हुए विस्तृत अनुसंधान कार्य के लिए ([4], [13], [21]-[23], [30], [34]-[39], [55]- [56], [69], [76], [78], [79], [81]-[83], [98], [127], [142], [170] व [201]) का अवलोकन करें.

एक अरिक्त समुच्चय X के लिए $X \times X \times X$ पर वास्तविक फलन d को 2-दूरीक कहते हैं यदि d निम्न शर्तें संतुष्ट करता हो:

(द-1) दो भिन्न विंदुओं x, y के लिए X में तीसरे विंदु z का इस प्रकार अस्तित्व हो कि $d(x, y, z) \neq 0$;

(द-2) यदि तीन विंदुओं x, y, z में से कम से कम दो समान हों तो $d(x, y, z) = 0$;

(द-3) $d(x, y, z) = d(y, z, x) = d(z, x, y)$; (तीनों चरों में सममिति);

(द-4) $d(x, y, z) \leq d(x, y, w) + d(x, w, z) + d(w, y, z)$ (त्रिभुजीय असमिका);

युग्म (X, d) को 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है. (द-2) और (द-4) से स्पष्ट है कि d एक ऋणेतर फलन है.

सर्वप्रथम 2-दूरीक से संबंधित कुछ उदाहरण दिये जा रहे हैं.

उदाहरण 1. [58]. यदि x_j, y_j, z_j क्रमशः x, y, z के निर्देशांक हों तो दो या अधिक विमाओं के प्रत्येक युक्लिडीयन दूरीक समष्टि पर निम्न 2-दूरीक पारिभाषित होती है:

$$d(x, y, z) = (1/2)\left[\sum_{i<j} \begin{vmatrix} x_i & x_j & 1 \\ y_i & y_j & 1 \\ z_i & z_j & 1 \end{vmatrix}^2\right]^{1/2}.$$

इस प्रकार पारिभाषित 2-दूरीक को युक्लिडीयन 2-दूरीक कहा जाता है.

उदाहरण 2. [120]. मान लें $X = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$

तथा $d : X \times X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ निम्न प्रकार पारिभाषित करें:

$$d(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x, y, z \text{ भिन्न हों तथा किसी धन पूर्णांक } n \text{ के लिए } \{1/n, 1/(n+1)\} \subset \{x, y, z\} \text{ है} \\ 0 & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

तब (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है.

उदाहरण 3. [120]. मान लें

$X = \{a\} \cup \{a_n : n = 1,2,\ldots\} \cup \{b\} \cup \{b_n : n = 1,2,\ldots\}$

जहाँ $a = (1,0)$, $b = (0,0)$, $a_n = (1+1/n, 0)$

तथा $b_n = (0, 1/n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$d : X \times X \times X \longrightarrow [0,\infty)$

निम्न प्रकार लें

$$d(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{यदि किसी धन पूर्णांक } n \text{ के लिए } \{x, y, z\} = \{a_n, b_n, a\} \text{ या } \{a_n, b_n, b\} \\ & \text{या विभिन्न धन पूर्णांकों } m, n \text{ के लिए } \{x, y, z\} = \{a_n, b_n, a_m\} \text{ या } \{a_n, b_n, b_m\} \\ A(x, y, z) & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

जहाँ $A(x, y, z)$ बिंदुओं x, y और z से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल है.

तब (X, d) एक 2-दूरीक समष्टि है.

इस अध्याय में हम 2-दूरीक एवं दूरीक (1-दूरीक) समष्टियों को क्रमशः (X, d) एवं (M, d) द्वारा प्रदर्शित करेंगे.

गहलर [58] ने सिद्ध किया है कि यद्यपि 2-दूरीक d तीनों चरों (अर्थात् तीनों निर्देशांकों) में किसी एक निर्देशांक के सापेक्ष संतत है किन्तु यह आवश्यक नहीं कि यह दो निर्देशांकों के सापेक्ष भी संतत हो. यदि यह दो निर्देशांकों के सापेक्ष संतत हो तो यह तीनों निर्देशांकों के सापेक्ष भी संतत होगा. 2-दूरीक फलन द्विसंतत कहा जायेगा यदि यह सभी निर्देशांकों के सापेक्ष संतत हो.

2-दूरीक समष्टि X का एक अनुक्रम $\{x_n\}$ 2-कोशी अनुक्रम (सामान्यतया, यदि भ्रम की गुंजायश न हो, कोशी अनुक्रम) कहा जाता है यदि X के प्रत्येक बिंदु a के लिए

$$\text{सीमा}_{m,n}\ d(x_m, x_n, a) = 0.$$

समष्टि X के बिंदु x पर अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसरित होता है और x को इस अनुक्रम की सीमा कहते हैं यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा}_n\ d(x_n, x, a) = 0 .$$

(X, d) को पूर्ण 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है यदि इसमें प्रत्येक कोशी अनुक्रम एक अभिसारी अनुक्रम हो.

उल्लेख्य है कि किसी पूर्ण 2-दूरीक समष्टि में अभिसरित होने वाले प्रत्येक अनुक्रम का कोशी होना आवश्यक नहीं है (देखें उदाहरण 2). इसमें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा अनुक्रम $\{1/n\}$ शून्य पर अभिसरित होता है परन्तु $\{1/n\}$ कोशी अनुक्रम नहीं है. एक अन्य उदाहरण (देखें, उदाहरण 3) में नायडू-प्रसाद [120] ने यह दिखाया कि यदि 2-दूरीक d समुच्चय X पर संतत हो तो समष्टि X में अभिसरित होने वाला प्रत्येक अनुक्रम कोशी होता है परन्तु इसका विलोम सत्य नहीं है.

मान लें L एक से अधिक विमावाली रैखिक समष्टि है तथा $L \times L$ पर निम्न शर्तों के साथ $||.,\ .||$ एक वास्तविक फलन है:

(म-1) $||a, b|| = 0$, यदि और केवल यदि a एवं b रैखिकतः आश्रित हैं;

(म-2) $||a, b|| = ||b, a||$;

(म-3) $||pa, b|| = |p|\,||a,b||$, जहां p वास्तविक संख्या है;

(म-4) $||a+b, c|| = ||a,b|| + ||b,c||$;

तब $||.,.||$ को L पर 2-मानकित एवं युग्म $(L, ||.,||)$ को 2-मानकित समष्टि कहा जाता है. स्पष्ट है कि $||.,.||$ एक ऋणेतर फलन है तथा किसी वास्तविक संख्या p एवं L के प्रत्येक x, y के लिए $||x, y + px|| = ||x, y||$.

इस अध्याय में जब तक अन्यथा न कहा जाये, L द्वारा 2-मानकित समष्टि को प्रदर्शित करेंगे.

2-मानकित समष्टि L का एक अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी अनुक्रम कहा जाता है यदि L में रैखिकतः स्वतंत्र अवयव y व z ऐसे हों कि

$$\text{सीमा}_{m,n}\ ||x_m - x_n,\ y|| = 0$$

और

$$\text{सीमा}_{m,n}\ ||x_m - x_n,\ z|| = 0\ .$$

2-मानकित समष्टि L में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ को अभिसारी कहा जायेगा यदि L के प्रत्येक अवयव y के लिए L में एक अवयव x का ऐसा अस्तित्व हो कि

$$\text{सीमा}_{n}\ ||x_n - x,\ y|| = 0\ .$$

यदि अनुक्रम $\{x_n\}$ समष्टि L के किसी बिंदु x पर अभिसारित होता हो तो x को इस अनुक्रम की सीमा कहा जाता है. 2-मानकित समष्टि L को 2-बानाख् समष्टि कहा जाता है यदि इसमें प्रत्येक कोशी अनुक्रम एक अभिसारी अनुक्रम हो.

उदाहरण 4. [201]. मान लें E_3 द्वारा त्रिविमीय सदिश समष्टि को प्रदर्शित किया जाता है. मान लें

$$x = (a, b, c),\ y = (d, e, f)$$

तथा

$$||x, y|| = |x \times y|.$$

तब $(E_3, ||.,.||)$ 2-बानाख् समष्टि है.

यदि $(L, ||.,.||)$ एक 2-मानकित समष्टि हो तब समष्टि L पर $d(x,y,z) = ||x-z, y-z||$ लेकर एक 2-दूरीक पारिभाषित किया जा सकता है. इस प्रकार प्रत्येक 2-मानकित समष्टि 2-दूरीक समष्टि भी है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है. हाल ही में चो-फ्रीजे [23] ने उन परिस्थितियों का अध्ययन किया जिनके अन्तर्गत एक 2-दूरीक समष्टि 2-मानकित समष्टि हो सकती है. 2-मानकित एवं 2-बानाख समष्टियों पर विस्तृत अध्ययन के लिए ([21], [23], [34]-[39], [59], [61], [98], [201]) का अवलोकन करें.

2

बानाख् संकुचन सिद्धांत एवं इसके कुछ व्यापकीकरण

स्थिर बिंदु सिद्धांत गणितीय विज्ञान की एक आकर्षक विधा है जो अनुप्रयोगों की दृष्टि से अवकल-समाकल समीकरणों, गतिकीय तन्त्रों, सांस्थितिकी, फलनक विश्लेषण, इष्टतम संचालन, विचरण सिद्धांत , क्रीड़ा सिद्धांत, सन्निकटन सिद्धांत, अभिकलित्र अभिलेखन, अभियांत्रिकी एवं अर्थशास्त्र के क्षेत्र में महत्वपूर्ण भूमिका निभा रही है. शनैः शनैः स्थिर बिन्दु अस्तित्व एवं इसको प्राप्त करने की नई विधियों के अन्वेषित एवं परिष्कृत होने से यह सिद्धांत प्रायोगिक गणित में विभिन्न प्रकार के समीकरणों के सफल साधन हेतु प्रमुख भूमिका निभाने लगा है. पिछले करीब तीस वर्षों में विभिन्न विन्यासों यथा – बीजीय सांस्थितिकी, दूरीक, 2-दूरीक, बानाख्, हिल्बर्ट,

प्रायिकतात्मक, यादृच्छिक एवं मानकित्त समष्टियों मे स्थिर विन्दुओं की प्राप्ति हेतु किये गये शोध कार्य से बृहत साहित्य सामने आया है. स्थिर बिंदु प्रमेयों के अनुप्रयोगों को देखते हुए इन प्रमेयों के व्यापक रूपों के प्रति गणितज्ञों की जिज्ञासा निरन्तर बनी हुई है.

1910 में एल0 ब्रावर द्वारा यह स्थापित किया गया कि ऐकक गोले पर पारिभाषित संतत स्व-प्रतिचित्रणों का एक स्थिर बिंदु होता है. कुछ समय बाद 1922 मे स्टेफ़न बानाख ने एक अन्य स्थिर बिंदु प्रमेय प्रतिपादित किया. जो अनुप्रायोगिक गणित के लिए एक महत्वपूर्ण उपकरण सिद्ध हुआ.प्रस्तुत शोध प्रबंध में हमारा उद्देश्य इस स्थिर बिंदु प्रमेय के कुछ अन्य व्यापकीकरण प्रस्तुत करना है. स्थिर बिंदु सिद्धांत पर रचित उपयोगी पुस्तकों के लिए ([12], [43], [67], [71]-[72] व [85]-[86]) का अवलोकन करें.

<u>बानाख संकुचन सिद्धांत</u>

यदि दूरीक समष्टि (M, d) पर एक प्रतिचित्रण T के लिए एक ऋणेतर नियतांक $k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि M के प्रत्येक x, y के लिए

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

तो T को समष्टि M पर संकुचन प्रतिचित्रण कहा जाता है. यदि $k = 1$ हो तब T को समष्टि M पर अविस्तारी प्रतिचित्रण कहा जाता है. स्पष्ट है कि अविस्तारी प्रतिचित्रण संकुचन प्रतिचित्रणों से अधिक व्यापक हैं. अविस्तारी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु के अस्तित्व एवं सन्निकटन हेतु अल्फ़ाख़ [3], एंडरसन-ग्वे-सिंह [5], आसाद-किर्क [6], बाईलोन-ब्रुक-रीच [8], बीलू-किर्क-स्टेनर [11], ब्राउडर [15], गोबेल-किर्क-शीमी [65], आईसेकी [79], ग्वे-सिंह-ह्विटफिल्ड [70], किर्क [101], नैम्पली-सिंह-ह्विटफिल्ड [123], रोआडेस [151] व सिंह [172] के कार्य विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं, (आचारि-लहरी [1], बे [7], कार्बोन-मारिनो [16], डिमनी-वाईट [38]-[39], फाइगूरिडो [46] , गोबेल-कुज्यूमोव [66], गोबेल-रीच [67], गोहडे [68], हाउस्डोर्फ [74], लहरी-तिवारी [106], लाल-सिंह [109], लिम [110], मार्किन [111], मासो-रोख [113], नाडलर [119], सामंता [157], सिंह [164], सिंह [195], थीप-वीट [197], वांग [202] व जैई [204] को भी देखें). जैसा कि सुज्ञात है पूर्ण दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रण एक अद्वितीय साधन रखता है अर्थात् M में एक ऐसे अद्वितीय बिंदु z का अस्तित्व होता है कि $Tz = z$.

यह सिद्धांत बनाख संकुचन सिद्धांत (<u>बासंसि</u>) के नाम से जाना जाता है. विभिन्न समष्टियों में बासंसि एवं इसके व्यापकीकरण का हाल ही में पर्याप्त अध्ययन हुआ है (देखें [1]-[3], [5]-[12], [14]-[22], [24]-[29], [31]-[33], [38]-[54], [57], [62], [68], [70]-[73], [75]-[97], [99]-[115], [117]-[126], [128]-[163], [165]-[196], [198]-[200], [202]-[204]).

ऐसा प्रतीत होता है कि के० आईसेकी-वी०के० शर्मा-पी०एल० शर्मा [82] द्वारा 2-दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रण (यदि 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रण T के लिए $k \in (0, 1)$ का ऐसा अस्तित्व हो कि X के प्रत्येक x, y, a के लिए $d(Tx, Ty, a) \leq kd(x, y, a)$) पारिभाषित करते हुए यह सिद्ध किया गया कि पूर्ण 2-दूरीक समष्टि पर पारिभाषित प्रत्येक संकुचन प्रतिचित्रण का एक अद्वितीय विंदु होता है.

उनके इस प्रारंभिक कार्य से 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों में स्थिर विंदुओं के अस्तित्व का समारंभन हुआ ([78]-[79], [81]-[82], [160] भी देखें). उल्लेख्य है कि इन गणितज्ञों ने 2-दूरीक समष्टि पर परिबद्धता की शर्त का प्रयोग करते हुए स्थिर विंदु का अन्वेषण किया. ऐसा प्रतीत होता है कि संकुचन प्रकार प्रतिचित्रणों के लिए इस शर्त से मुक्त परिणाम सर्वप्रथम रोअडेस [150] एवं लाल-सिंह [108] स्थापित किये. स्थिर विंदु सिद्धांत में समष्टि के अवयवों द्वारा रचित अनुक्रम का कोशी होना या न होना महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है. इस परीक्षण के लिए सिंह [168] ने 1979 में रोअडेस [150] से प्रेरणा लेकर निम्न प्रमेयिका स्थापित की जिसने 2-दूरीक समष्टि पर स्थिर विंदुओं के अन्वेषण को अत्यंत सुगम बना दिया.

<u>प्रमेयिका</u> <u>2.1.</u> <u>[168].</u> मान लें पूर्ण 2-दूरीक समष्टि X में $\{y_n\}$ एक अनुक्रम है. तब अनुक्रम $\{y_n\}$ समष्टि X के किसी विंदु पर अभिसरित होगा यदि प्रत्येक n और X के प्रत्येक a के लिए $h \in (0, 1)$ का ऐसा अस्तित्व हो कि

$$d(y_n, y_{n+1}, a) \leq hd(y_{n-1}, y_n, a)$$

यहां पर हाल ही में प्रकाशित सिंह-गांगुली-कुमार [179] की निम्न प्रमेय का उल्लेख करना समीचीन होगा, प्रमेय से प्रयुक्त संकेत निम्न अर्थों में हैं:

X न्यूनतम तीन बिंदुओं वाले मनमाने समुच्चय के लिए प्रयुक्त है. N का प्रयोग प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय के रूप में, (Y, d) का 2-दूरीक समष्टि के रूप में एवं $H = \{h:[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$: उपरि सामिसंतत अह्रासमान है एवं $h(t) < t$, $t > 0\}$. यदि S तथा P समष्टि Y पर प्रतिचित्रण हैं तब C(SP) को S तथा P के समस्त संपाती बिंदुओं के समुच्चय के रूप में प्रयुक्त किया जायेगा, अर्थात् $C(SP) = \{z : Sz = Pz\}$.

<u>प्रमेय</u> <u>2.2.</u> मान लें X एक मनमाना समुच्चय है. Y एक 2-दूरीक समष्टि और $A_i (i \in N)$: $X \longrightarrow Y$ है, यदि प्रतिचित्रण S, T : $X \longrightarrow Y$ इस प्रकार हैं कि $A_i(X) \subset S(X) \cap T(X)$, $i \in N$ तथा समस्त $x, y \in X$, $a \in Y$, $i, j \in N$ $i \neq j$ के लिए तथा H के किसी h के लिए

(2.2.1) $$d(A_i x, A_j y, a)$$

$$\leq h(\text{अधिकतम } \{d(Sx, Ty, a), d(Sx, A_i x, a),$$

$$d(Ty, A_j y, a), 1/2[d(Sx, A_j y, a)$$

$$+ d(Ty, A_i x, a)]\}),$$

तथा $S(X) \cap T(X)$ समष्टि Y की पूर्ण उपसमष्टि है तब प्रत्येक $i \in N$ के लिए

(2.2.2) A_i और S_i में संपात है;

(2.2.3) A_i और T_i में संपात है;
तथा यदि $X = Y$ और प्रत्येक A_i, S (क्रमशः T) के साथ $c(A_i S)$ (क्रमशः $c(A_i T)$) पर क्रमविनिमयित होता है, तब $A_i (i \in N)$, S और T का अद्वितीय स्थिर बिंदु होगा.

ऐसा प्रतीत होता है कि सिंह-गांगुली-कुमार [179] की उक्त प्रमेय 2-दूरीक समष्टि पर संकुचनीय प्रकार के प्रतिचित्रणों हेतु अभी तक ज्ञात परिणामों से व्यापक है. इससे कई परिणाम उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं. उदाहरणार्थ [73], [87], [102], [120], [150], [169] व [182] के परिणाम उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं.

3

जुंक संकुचन सिद्धांत

यदि दूरीक समष्टि (M, d) पर स्व-प्रतिचित्रणों f व g के लिए एक धनात्मक नियतांक $k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि

(ज-1) $fM \subset gM$;

(ज-2) $d(fx, fy) \leq kd(gx, gy)$, $x, y \in M$;

(ज-3) प्रतिचित्रण g संतत हो;

(ज-4) प्रतिचित्रण f और g क्रमविनिमयी हों;

तब पूर्ण दूरीक समष्टि M में प्रतिचित्रण f एवं g अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु रखते हैं.

यह परिणाम जुंक [87] द्वारा 1976 में प्रतिपादित किया गया.

(<u>विशेष टिप्पणी</u> : यद्यपि प्रतिबंधो (ज-1)-(ज-2) के अधीन दो प्रतिचित्रणों के संपात बिंदु का अध्ययन गोबेल [64] ने युंक के परिणाम प्रकाशित होने से पूर्व कर लिया था, ऐसा प्रतीत होता है कि युंक के उक्त परिणाम का आधार गोबेल [64] का संपात प्रमेय नहीं है. वस्तुतः गोबेल ने बासंसि का प्रयोग करते हुए यह सिद्ध किया है यदि पूर्ण दूरीक समष्टि पर स्व-प्रतिचित्रण (ज-1)-(ज-2) को संतुष्ट करें तो प्रतिचित्रणों f और g का M के कम से कम एक बिंदु पर संपात होता है अर्थात् M में कम से कम एक ऐसे बिंदु z का अस्तित्व होता है कि fz = gz . वर्ष 1983 में, एक वार्ता के दौरान प्रो0 एस0एल0 सिंह ने प्रो0 जी0 युंक से यह पूछा कि क्या आप 1968 में प्रकाशित गोबेल संपात प्रमेय से परिचित हैं? इस प्रश्न का प्रो0 युंक ने नकारात्मक उत्तर दिया था.)

युंक के उक्त परिणाम ने संकुचनीय सिद्धांत में एक नयी दिशा को जन्म दिया. वस्तुतः युंक का उक्त परिणाम सर्वप्रथम सिंह [163] द्वारा व्यापकीकृत हुआ. तत्पश्चात अनेकों गणितज्ञों ने युंक प्रकार के संकुचन सिद्धांतों का प्रतिपादन किया. उदाहरणार्थ देखें ([18]-[19], [24], [29], [33], [40]-[41], [47], [50]-[52], [54], [57], [73], [88]-[91], [93]-[97], [102], [104]-[105], [112], [117]-[118], [120], [124]-[125], [128], [132]-[134], [137]-[138], [140], [152]-[156], [163], [165]-171], [173]-[175], [177]-[194], [196], [200]).

युंक प्रकार के संकुचन सिद्धांत में प्रतिचित्रणों की क्रमविनिमेयता (ऊपर (ज-4) देखें) को शिथिल करने के कुछ सफल प्रयास किये गये. इतालवी गणितज्ञ सेसा [156] ने दुर्बल क्रमविनिमेयता, युंक [88] ने सुसंगता, सिंह-तिवारी [189] ने उपगामी क्रमविनिमेयता व पाठक [137] ने दुर्बल* क्रमविनिमेयता से क्रमविनिमेयता को प्रतिस्थापित करते हुए व्यापक परिणाम प्राप्त किये. (क्रमविनिमेयता के दुर्बल स्वरुपों की परिभाषाओं एवं इनके आपसी संबंधों पर उदाहरणों हेतु आगामी अध्याय का प्रथम अनुभाग देखें) युंक [87] का उक्त परिणाम अब युंक संकुचन सिद्धांत (<u>युसंसि</u>) के नाम से जाना जाता है (उदाहरणार्थ देखें , [189], [192]).

ऐसा प्रतीत होता है कि युंक [87] की प्रमेय का 2-दूरीक समष्टि में सर्वप्रथम विस्तारण 1977-78 में प्रोफेसर श्याम लाल सिंह द्वारा किया गया (देखें [166] व [190]).इस सिद्धांत का 2-दूरीक सादृश प्रमेय 2.2 में अन्तर्निहित है. इसके बाद युसंसि का व्यापकीकरण, विस्तारण व अनुप्रयोग विभिन्न समष्टियों एवं विन्यासों में किया गया (उदाहरणार्थ देखें, [18], [25], [54], [57], [94], [95], [97], [102], [105], [117]-[118], [120], [140], [165]-[171], [173], [181]-[194], [199]).

4

आगामी अध्यायों की संक्षिप्त रूपरेखा

द्वितीय अध्याय में चुंग [27], पाचपट्टे [130], रोअडेस [152], पाठक [136]-[137] द्वारा स्थापित किये गये स्थिर बिंदु प्रमेयों की प्रतिचित्रण शर्तों का अध्ययन किया गया तथा इनमें से कुछ परिणामों को विस्तारित करते हुए कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये गये हैं. इस प्रकार सुज्ञात बानाख् संकुचन सिद्धांत के कुछ अन्य व्यापकीकरण प्राप्त होते हैं. संबंधित परिभाषाओं आदि को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण प्रारंभ में ही दिये गये हैं. 1973 में प्रोफेसर जे० मटकोवस्की [114]-[115] ने गुणन समष्टियों पर सुज्ञात बानाख् संकुचन सिद्धांत का एक महत्वपूर्ण व्यापकीकरण प्रस्तुत किया जो संप्रति अनुप्रयोज्य विश्लेषण के लिए महत्वपूर्ण हो रहा है. तृतीय अध्याय में इस संकुचन सिद्धान्त का 2-दूरीक समष्टि में अध्ययन करने का प्रयास किया गया है. इस प्रकार प्राप्त परिणाम गोबेल [64], युंक [87], सिंह-कुलश्रेष्ठ [176], आईसेकी शर्मा - शर्मा [78],[82] के परिणामों का विस्तारण एवं एकीकरण करते हैं. चतुर्थ अध्याय में 2-बानाख् समष्टि पर एक नई शर्त के अधीन स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये गये हैं. यह सुज्ञात है कि अविस्तारी प्रकार के प्रतिचित्रणों के पुनरावृत्तिकों का किसी स्थिर बिंदु पर अभिसरित होना आवश्यक नहीं है. पंचम अध्याय का उद्देश्य कुछ ऐसी प्रतिचित्रण शर्तों का अध्ययन करना है जिनके अधीन 2-मानकित समष्टि पर पारिभाषित प्रतिचित्रणों के पुनरावृत्तिकों का अनुक्रम प्रतिचित्रण के स्थिर बिंदु पर अभिसरित हो सके. वस्तुतः 2-मानकित समष्टि पर पुनरावृत्तिकों के अभिसरण संबंधी समस्याओं के अध्ययन का यह प्रथम प्रयास है. अंतिम अध्याय में अविस्तारी प्रतिचित्रणों हेतु कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये गये हैं.

द्वितीय अध्याय

2-दूरीक समष्टि में संकुचनीय प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु

प्रस्तुत अध्याय में विभिन्न संकुचनीय शर्तों के अधीन 2-दूरीक समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय सिद्ध किये गये हैं. यह अध्याय निम्न अनुभागों में विभाजित हैः

1. परिभाषाएं एवं उदाहरण

2. दो प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

3. परिमेय असमिकाओं हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

4. सुसंगत प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

5. दुर्बल*क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

1

परिभाषाएं एवं उदाहरण

<u>परिभाषा</u> <u>1.1</u> <u>[156].</u> दूरीक समष्टि (M,d) पर स्व-प्रतिचित्रणों P व T को दुर्बल क्रमविनिमयी कहा जाता है यदि M के प्रत्येक x के लिए

$$d(PTx, TPx) \leq d(Px, Tx).$$

स्पष्टतया, M पर क्रमविनिमयी युगल दुर्बल क्रमविनिमयी भी होंगे परन्तु इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है. यह निम्न उदाहरण से प्रदर्शित होता है.

<u>उदाहरण</u> <u>1.1</u> <u>[156].</u> मान लें M = [0,1], d निरपेक्ष मान दूरीक है तथा स्व-प्रतिचित्रण P व T समष्टि M के प्रत्येक x तथा a > 1 के लिए निम्न प्रकार पारिभाषित हैं -

$$Px = x/(2a+x), \; Tx = x/a.$$

स्पष्टतः P एवं T दुर्बल क्रमविनिमयी हैं परन्तु क्रमविनिमयी नहीं हैं.

<u>परिभाषा</u> <u>1.2</u> <u>[120].</u> मान लें P एवं T 2-दूरीक समष्टि (X,d) पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. तब P एवं T को किसी बिन्दु $x \in X$ पर दुर्बल क्रमविनिमयी कहा जायेगा यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$d(PTx, TPx, a) \leq d(Px, Tx, a).$$

यदि P एवं T समष्टि X के प्रत्येक बिंदु पर इसी प्रतिबंध को संतुष्ट करें तो वे दुर्बल क्रमविनिमयी कहे जायेंगे.

निम्न उदाहरण से स्पष्ट है कि दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों का क्रमविनिमयी होना आवश्यक नहीं है जबकि इसका विलोम सदैव सत्य है.

<u>उदाहरण</u> <u>1.2. [120].</u> मान लें $X = \{1,2,3,4\}$ तथा दूरीक $d: X \times X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ को निम्न प्रकार पारिभाषित करें

$$d(x,y,z) = \begin{cases} 0 \text{ यदि } x = y \text{ या } y = z \text{ या } z = x \text{ या} \\ \{x,y,z\} = \{1,2,3\}, \\ \\ 1/2 \text{ अन्यथा,} \end{cases}$$

स्व-प्रतिचित्रणों S एवं T को इस प्रकार पारिभाषित करें:

$$S1 = S2 = S3 = S4 = 2$$

तथा

$$T1 = T2 = T3 = T4 = 3 .$$

तब (X,d) एक 2-दूरीक समष्टि है और S एवं T दुर्बल क्रमविनिमयी हैं परन्तु क्रमविनिमयी नहीं हैं.

<u>परिभाषा</u> <u>1.3[189].</u> दूरीक समष्टि (M,d) स्व-प्रतिचित्रणों P व T को उपगामी क्रमविनिमयी या u-उपगामी क्रमविनिमयी (जिसे युंक [88] द्वारा सुसंगत भी कहा जाता है) कहा जायेगा यदि और केवल यदि

$$\text{सीमा}_n d(PTx_n, TPx_n) = 0;$$

जबकि X में $\{x_n\}$ इस प्रकार का अनुक्रम है कि X के किसी बिंदु u के लिए

(*) $\text{सीमा}_n Px_n = \text{सीमा}_n Tx_n = u.$

स्पष्टतया शर्त (*) को संतुष्ट करने वाले दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल उपगामी क्रमविनिमयी होंगे तथा निम्न उदाहरण प्रदर्शित करता है कि इसके विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है.

उदाहरण 1.3. [177]. माना कि $M = [0, \infty)$, $Px = 2x^2$, $Tx = 3x^2$ तथा M पर d निरपेक्ष मान दूरीक है, तब

$$d(PTx, TPx) = 6x^4$$

एवं

$$d(Tx, Px) = x^2.$$

स्पष्टतया M के सभी बिंदुओं x के लिए

$$d(PTx, TPx) \nleq d(Tx, Px).$$

अस्तु P व T दुर्बल क्रमविनिमयी नहीं हैं, किंतु यदि

$$x_n = 2^{-n} \text{ तब}$$

$$Px_n \to 0, \ Tx_n \to 0, \ d(PTx_n, TPx_n) \to 0$$

और P व T u-उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण हैं, जहां $u = 0$.

प्रपत्रों [88], [152], [177] व [189] में यह दावा किया गया है कि सुसंगत अथवा उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल ⟨P, T⟩ दुर्बल क्रमविनिमयी होंगे, किंतु हाल ही में प्रोफेसर एस0एल0 सिंह (हिरिद्वार) ने 'मैथमेटिकल रिव्यूज़' (देखें MR 89h : 54030 या उदाहरण 1.4) के लिए प्रोफेसर युंक के प्रपत्र [90] का पुनरावलोकन करते समय एक उदाहरण देते हुए यह टिप्पणी किया कि दूरीक समष्टि में दुर्बल क्रमविनिमयी प्रतिचित्रण युगल आवश्यक नहीं कि उपगामी क्रमविनिमेयता (या सुसंगतता) की शर्त को संतुष्ट करने के लिए समष्टि में किसी अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ का अस्तित्व हो ही.

उदाहरण 1.4. मान लें $M = [1,\infty)$, d = निरपेक्ष मान दूरीक, तथा $f, g : M \longrightarrow M$ जहाँ $fx = 1 + x$, $gx = 1 + 2x$. स्पष्टतया

$$d(fgx, gfx) = 1 \leq x = d(fx, gx).$$

अस्तु, f एवं g दुर्बल क्रमविनिमयी हैं किन्तु समष्टि M में किसी ऐसे अनुक्रम $\{x_n\}$ का अस्तित्व नहीं मिलता जिसके लिए f व g सुसंगत प्रतिचित्रण हो सकें.

परिभाषा 1.4. [177]. माना P एवं T किसी 2-दूरीक समष्टि (X, d) पर स्व-प्रतिचित्रण हैं तब P और T को x पर उपगामी क्रमविनिमयी या सुसंगत कहा जायेगा यदि और केवल यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा}_n\ d(PTx_n, TPx_n, a) = 0$$

जबकि $\{x_n\} \subset X$ इस प्रकार का अनुक्रम है कि

$$\text{सीमा}_n\ Px_n = \text{सीमा}_n\ Tx_n = u.$$

परिभाषा 1.5. [154]. मान लें दूरीक समष्टि (M, d) पर S एवं T दो स्व-प्रतिचित्रण हैं. समष्टि M में अनुक्रम $\{x_n\}$ को S के सापेक्ष उपगामितः T-नियमित कहा जायेगा यदि

$$\text{सीमा}_n\ d(Sx_n, Tx_n) = 0.$$

परिभाषा 1.6. [193]. मान लें 2-दूरीक समष्टि (X,d) पर S एवं T दो स्व-प्रतिचित्रण हैं. समष्टि X में अनुक्रम $\{x_n\}$ को S के सापेक्ष उपगामितः T-नियमित कहा जायेगा यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा}_n\ d(Sx_n, Tx_n, a) = 0.$$

परिभाषा 1.7. [137]. मान लें दूरीक समष्टि (M,d) पर S व T दो स्व-प्रतिचित्रण हैं. तब समष्टि M में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ को S^2 के सापेक्ष उपगामितः T^2- नियमित कहा जायेगा यदि

$$\text{सीमा}_n\ d(S^2x_n,\ T^2x_n) = 0.$$

परिभाषा 1.8. मान लें (X,d) एक 2-दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि X पर दो स्व-प्रतिचित्रण हैं. तब समष्टि M में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ को S^2 के सापेक्ष उपगामितः T^2-नियमित कहा जायेगा यदि X के प्रत्येक a के लिए

$$\text{सीमा}_n\ d(S^2x_n,\ T^2x_n,\ a) = 0.$$

परिभाषा 1.9. [137]. मान लें दूरीक समष्टि (M,d) पर S एवं T दो स्व-प्रतिचित्रण हैं, तब युगल (S,T) को दुर्बल* क्रमविनिमयी कहा जायेगा यदि M के प्रत्येक x के लिए

$$d(STx,\ TSx) \leq d(S^2x,\ T^2x).$$

स्पष्टतया, प्रत्येक क्रमविनिमयी युगल दुर्बल* क्रमविनिमयी होता है परन्तु इसके विलोम का सदैव सत्य होना आवश्यक नहीं है. यह निम्न उदाहरण से प्रदर्शित होता है.

उदाहरण 1.5. [137]. मान लें M = [0,1] निरपेक्ष मानदूरीक के साथ दूरीक समष्टि है. M के प्रत्येक x के लिए S एवं T निम्नवत् पारिभाषित हैं.

$$Sx = x/(x + 2),\ Tx = x/2.$$

तब S एवं T दुर्बल* क्रमविनिमयी हैं परन्तु क्रमविनिमयी नहीं हैं.

परिभाषा 1.10. 2-दूरीक समष्टि (X,d) पर स्व-प्रतिचित्रणों S एवं T को दुर्बल* क्रमविनिमयी कहा जायेगा यदि X के प्रत्येक x व a के लिए

$$d(STx,\ TSx,\ a) \leq d(S^2x,\ T^2x,\ a).$$

2

दो प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

1978 में चुंग [27] ने दूरीक समष्टि (M, d) पर पारिभाषित दो प्रतिचित्रणों के लिए निम्नलिखित संकुचन शर्त के अधीन कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये जो बायड़-वांग [14], चुंग [26] (इस प्रपत्र पर विशेष टिप्पणी हेतु रोआडेस [146] देखें) फिशर [47], आदि के परिणामों का विस्तारण करती हैं.

$$(*) \qquad d(Sx, TSy)$$

$$\leq k(d(x, Sy)) \text{ अधिकतम } \{d(x, Sy), d(x, Sx), d(Sy, TSy)$$

$$\tfrac{1}{2}[d(x, TSy) + d(Sy, Sx)]\};$$

जहाँ समस्त $x, y \in M$ तथा k दांये से $\overline{P} - \{0\}$ पर उपरि सामिसंतत है और $\overline{P} - \{0\}$ के प्रत्येक t के लिए $k(t) < 1$, जहाँ $P = \{d(x, y) : x, y \in M\}$.

हाल ही में पाचपट्टे [130] ने चुंग [27] के परिणामों के आलोक में एक नई प्रकार की संकुचन शर्त के अधीन कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये.

$$(**) \qquad [d(Sx, TSy)]^2$$

$$\leq k(d(x, Sy)) \text{ अधिकतम } \{d(x, Sx). d(Sy, TSy),$$

$$d(x, TSy). d(Sy, Sx), 1/2\, d(x, Sx). d(Sy, Sx),$$

$$\tfrac{1}{2} d(x, TSy). d(Sy, TSy)\};$$

जहाँ समस्त $x, y \in M$ तथा k दांये से $\overline{P} - \{0\}$ पर उपरिसामि-संतत है और $\overline{P} - \{0\}$ के प्रत्येक t के लिए $k(t) < 1$, जहाँ $P = \{d(x, y) : x, y \in M\}$.

प्रस्तुत अनुभाग में हम शर्त (*) एवं शर्त (**) से प्रेरणा लेकर 2-दूरीक समष्टि में क्रमशः प्रमेय 2.1 एवं प्रमेय 2.2 सिद्ध कर रहे हैं. इस अनुभाग के परिणाम निम्नवत् हैं:

<u>प्रमेय</u> <u>2.1.</u> मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं यदि धन संख्याओं k एवं p (जहाँ $0 < k < 1,\ kp < 1/2$) का अस्तित्व इस प्रकार हो कि X के सभी x, y, a के लिए

(2.1.1)
$$d(Sx, TSy, a)$$
$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d(x, Sy, a), d(x, Sx, a),$$
$$d(Sy, TSy, a), p[d(x, TSy, a) + d(Sy, Sx, a)]\};$$

संतुष्ट हों तो S एवं T के एक अद्वितीय स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा.

<u>उपपत्ति</u>. माना x_0 समष्टि X का कोई बिंदु है. समष्टि के बिंदुओं से एक अनुक्रम इस प्रकार पारिभाषित करें कि

$$x_1 = Sx_0,\ x_2 = Tx_1,\ \ldots\ldots,\ x_{2x+1} = Sx_{2n},$$
$$x_{2n+2} = Tx_{2n+1}, \ldots\ldots\ldots$$

सुविधा के लिए मान लें

$$d_n = d(x_n, x_{n+1}, a).$$

अब (2.1.1) से

(2.1.2) $$d_{2n+1}$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d_{2n}, d_{2n+1}, pd(x_{2n}, x_{2n+2}, a)\}.$$

अब त्रिभुजीय असमिका से $$d_{2n+1}$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d_{2n}, d_{2n+1}, p[d_{2n} + d_{2n+1} + d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})]\}.$$

इसमें $a = x_{2n}$ लेने पर

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n}) \leq 2kp\, d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n})$$

जिससे

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n}) = 0 \text{ , चूँकि } 2kp < 1.$$

अतः (2.1.2) से

$$d_{2n+1} \leq q\, d_{2n} \text{, जहाँ } 1 > q = \text{ अधिकतम } \{k, kp/(1 - kp)\}.$$

इसी प्रकार

$$d_{2n+2} \leq q\, d_{2n+1}.$$

अस्तु

$$d_{n+1} \leq q d_n.$$

प्रमेयिका [168, पृ0 2] के आलोक में अनुक्रम (x_n) कोशी है, अतः समष्टि X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा. पुनः (2.1.1) से

$$d(Sz, z, a)$$

$$\leq d(Sz, z, Tx_{2n+1}) + d(Sz, Tx_{2n+1}, a) + d(Tx_{2n+1}, z, a)$$

$$= d(Sz, z, x_{2n+2}) + d(Sz, TSx_{2n}, a) + d(x_{2n+2}, z, a)$$

$$\leq d(Sz, z, x_{2n+2}) + k \text{ अधिकतम } \{d(z, Sx_{2n}, a), d(z, Sz, a),$$

$$d(Sx_{2n}, TSx_{2n}, a), p[d(z, TSx_{2n}, a) + d(Sx_{2n}, Sz, a)]\}$$

$$+ d(x_{2n+2}, z, a)$$

$$= d(Sz, z, x_{2n+2}) + k \text{ अधिकतम } \{d(z, x_{2n+1}, a),$$

$$d(z, Sz, a), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a), p[d(z, x_{2n+2}, a)$$

$$+ d(x_{2n+1}, Sz, a)]\} + d(x_{2n+2}, z, a).$$

अब n का सीमान्त मान लेने पर

$$d(Sz, z, a)$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d(z, Sz, a), pd(z, Sz, a)\}$$

$$\leq \text{ अधिकतम } \{k, kp\}\, d(z, Sz, a).$$

चूँकि 1 > अधिकतम {k, kp} इसलिए

$$z = Sz.$$

इसी प्रकार $z = Tz$.

अर्थात् z प्रतिचित्रणों S एवं T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

z की अद्वितीयता सिद्ध करने के लिए मान लें X में एक अन्य बिंदु z_1 का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$z_1 = Sz_1 = Tz_1$$

तब

$$d(z_1, z, a) = d(Sz_1, TSz, a)$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d(z_1, Sz, a), d(z_1, Sz_1, a), d(Sz, TSz, a),$$

$$p[d(z_1, Tsz, a) + d(Sz, Sz_1, a)]\}$$

$$= k \text{ अधिकतम } \{d(z_1, z, a), p[2d(z_1, z, a)]\}$$

$$= \text{अधिकतम } \{k, 2pk\}\, d(z_1, z, a).$$

जिससे

$$z = z_1, \text{ चूँकि, } 1 > \text{अधिकतम } \{k, 2kp\}.$$

प्रमेय 2.2. मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. यदि धन संख्याओं k एवं p (जहां, $0 < k < 1$, $kp < 1/2$) का अस्तित्व इस प्रकार हो कि X के सभी x, y, a के लिए

(2.2.1) $[d(Sx, TSy, a)]^2$

$\leq k$ अधिकतम $\{d(x, Sx, a). d(Sy, TSy, a),$

$d(x, TSy, a). d(Sy, Sx, a), pd(x, Sx, a)$

$\times d(Sy, Sx, a), pd(x, TSy, a). d(Sy, TSy, a)\}$;

संतुष्ट हो तो S एवं T के एक अद्वितीय अभयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा.

<u>उपपत्ति</u>. माना x_0 समष्टि X का कोई बिंदु है. समष्टि के बिंदुओं से एक अनुक्रम इस प्रकार पारिभाषित करें कि

$$x_1 = Sx_0,\ x_2 = Tx_1,\ \ldots\ldots,\ x_{2n+1} = Sx_{2n},$$

$$x_{2n+2} = Tx_{2n+1}, \ldots\ldots$$

सुविधा के लिए मान लें

$$d_n = d(x_n, x_{n+1}, a).$$

अब (2.2.1) से

(2.2.2) $d^2_{2n+1} = [d(Sx_{2n}, TSx_{2n}, a)]^2$

$\leq k$ अधिकतम $\{d_{2n}.d_{2n+1},\ 0\ , pd(x_{2n}, x_{2n+2}, a)$

$\times d_{2n+1}\}$

$\leq k$ अधिकतम $\{d_{2n}.d_{2n+1}, p[d_{2n} + d_{2n+1}$

$+ d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})].d_{2n+1}\}.$

इसमें $a = x_{2n}$ लेने पर

$$[d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})]^2 \leq 2kp[d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2})]^2.$$

जिससे

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}) = 0, \text{ क्योंकि } 2kp < 1.$$

पुनः (2.2.2) से

$$d^2_{2n+1}$$

$$\leq k \text{ अधिकतम } \{d_{2n}\cdot d_{2n+1}, p[d_{2n} + d_{2n+1}]\cdot d_{2n+1}\}.$$

जिससे

$$d_{2n+1} \leq qd_{2n}, \text{ जहाँ, } 1 > q = \text{ अधिकतम } \{k, kp/(1-kp)\}.$$

इसी प्रकार

$$d_{2n+2} \leq qd_{2n+1}.$$

अस्तु $d_{n+1} \leq qd_n$.

अब प्रमेयिका ([168], पृ0 2) के आलोक में स्पष्ट है कि अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी है. चूँकि समष्टि (X, d) पूर्ण है इसलिए यह अनुक्रम X के किसी बिंदु z पर अभिसरण होगा. अब हम सिद्ध करेंगे कि S एवं T का z उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

$$[d(z, Sz, a)]^2$$

$$\leq [d(z, Sz, Tx_{2n+1}) + d(z, Tx_{2n+1}, a)$$

$$+ d(Tx_{2n+1}, Sz, a)]^2 = [d(z, Sz, x_{2n+2})$$

$$+ d(z, x_{2n+2}, a) + d(TSx_{2n}, Sz, a)]^2$$

$$= [d(z, Sz, x_{2n+2})]^2 + [d(z, x_{2n+2}, a)]^2$$

$$+ k \text{ अधिकतम } \{d(z, Sz, a) \cdot d_{2n+1}, d(z, x_{2n+2}, a)$$

$$\times d(x_{2n+1}, Sz, a), pd(z, Sz, a). d(x_{2n+1}, Sz, a),$$

$$pd(z, x_{2n+2}, a). d(x_{2n+1}, x_{2n+2}, a)\}$$

$$+ 2d(z, Sz, x_{2n+2}). d(z, x_{2n+2}, a) + 2 d(z, x_{2n+2}, a)$$

$$\times d(x_{2n+2}, Sz, a) + 2d(x_{2n+2}, Sz, a). d(z, x_{2n+2}, Sz).$$

n का सीमान्त मान लेने पर

$$[d(z, Sz, a)]^2 \leq k\, p[d(z, Sz, a)]^2 .$$

जिससे

$$z = Sz, \quad \text{चूंकि } kp < 1/2.$$

इसी तरह

$$z = Tz.$$

अतः z प्रतिचित्रणों S एवं T का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

प्रमेय 2.1 के समान यह सिद्ध किया जा सकता है कि बिंदु z अद्वितीय है.

3

परिमेय असमिकाओं हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

द्विवक्कारो-फिशर -सेसा [40], फिशर [48]-[49], फिशर-खान [53] आदि ने सममित परिमेय असमिकाओं को संतुष्ट करने वाले युगल प्रतिचित्रणों के लिए कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये. दूसरी ओर बजाज [9] और पाठक [136] द्वारा कुछ असममित असमिकाओं को संतुष्ट करने वाले प्रतिचित्रणों के लिए कुछ स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किये.जे.पाठक [136] द्वारा निम्न प्रतिबंध का अध्ययन किया गया:

मान लें (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि M पर स्व-प्रतिचित्रण ऐसे हैं कि M के प्रत्येक x, y के लिए

$$(*) \qquad d(Sx, Ty)$$

$$\leq p\,\{d(x, Sx)[d(x, Ty) + d(x, y)]+[d(x, y)]^2\}/\{d(x, Sx) + d(x, Ty) + d(x, y)\}$$

$$+ q\,\{d(x, Sx)[d(x, Ty) + d(x, y)]\}/\{d(x, Sx) + d(x, Ty)\} + r d(x, y)$$

संतुष्ट हो, जहाँ $p, q, r \geq 0$, $p + q + r \leq 1$ तथा $d(x, Sx) + d(x, Ty) \neq 0$.

प्रस्तुत अनुभाग में हम प्रतिबंध (*) का अध्ययन 2-दूरीक समष्टि में कर रहे हैं.

<u>प्रमेय</u> <u>3.1.</u> मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. यदि धन संख्याओं p, q, r (जहाँ $p + q + r < 1$) का इस प्रकार अस्तित्व हो कि X के प्रत्येक x, y, a के लिए

(3.1.1) $d(Sx, Tx, a)$

$$\leq p\{d(x, Sx, a)[d(x, Ty, a)+d(x, y, a)] + d(x, y, a)]^2\}/\{d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a) + d(x, y, a)\}$$

$$+ q\{d(x, Sx, a)[d(x, Ty, a) + d(x, y, a)]\}/\{d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a)\} + rd(x, y, a)$$

संतुष्ट हो तथा $d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a) \neq 0$, तब S एवं T के एक अयनिष्ठ स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा. भूयो यदि $d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a) = 0$ तो S एवं T के एक अद्वितीय स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा.

उपपत्ति. मान लें समष्टि X में x_0 कोई बिंदु है तथा इसमें अनुक्रम $\{x_n\}$ की रचना इस प्रकार की जाती है कि

$$x_{2n+1} = Sx_{2n}$$

और

$$x_{2n+2} = Tx_{2n+1}, \quad n = 0,1,2,......$$

सुविधा के लिए मान लें $d_n = d(x_n, x_{n+1}, a)$. अब (3.1.1) से

$$d_{2n} \leq (p + q + r)d_{2n-1}$$

और

$$d_{2n+1} \leq (p + q + r)d_{2n} .$$

अस्तु,

$$d_n \leq (p + q + r)d_{n-1}$$

प्रमेयिका [168 पृ0 2] के आलोक में $\{x_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है अतः समष्टि X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा. अब हम सिद्ध करेंगे कि z प्रतिचित्रण T का स्थिर बिंदु है.

$$d(z, Tz, a) \leq d(z, x_{2n+1}, a) + d(Sx_{2n}, Tz, a)$$

$$+ d(z, Tz, x_{2n+1})$$

इसमें (3.1.1) का प्रयोग करने तथा n का सीमान्त मान लेने पर $d(z, Tz, a) \leq 0$

जिससे $z = Tz$. इसी प्रकार $Sz = z$.

अब यह दिखाना शेष है कि यदि समष्टि X के प्रत्येक अवयव x, y, a के लिए $d(x, Sx, a) + d(x, Ty, a) = 0$ हो तो उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु z अद्वितीय होगा. मान लें समष्टि X में प्रतिचित्रण T का एक अन्य स्थिर बिंदु w है. तब

$$d(z, Sz, a) + d(z, Tw, a) = 0$$

जिससे

$$z = Sz = Tw .$$

परन्तु

$$w = Tw .$$

अतः

$$w = z.$$

<u>टिप्पणी 3.1.1.</u> प्रमेय 3.1 में यदि $S = T$, $p = q = 0$ लें तो बानाख़ संकुचन सिद्धांत का 2-दूरीक समष्टि में विस्तार (देखें [78] एवं [82])प्राप्त होता है.

4

सुसंगत प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

हाल ही में रोअडेस् आदि ने प्रपत्रों [152]-[154] में उत्तरोत्तर सन्निकटन के अनुक्रम का प्रयोग किये बिना ही सापेक्ष उपगामी नियमितता की अवधारणा का समावेश करते हुए हार्डी-रोजर प्रमेय (देखें [153], [195])) का विस्तार किया और कई परिणाम उपप्रमेय के रूप में प्राप्त किये. उदाहरणार्थ देखें, (दास – नायक [33], फिशर [51], युंक [87]-[88], कानन [92], रीच [143]).

रोअडेस् आदि [152] द्वारा चार प्रतिचित्रणों के सुसंगत युगलों के लिए अनुक्रम की सापेक्ष उपगामी नियमितता की संकल्पना का प्रयोग करते हुए निम्न संकुचन शर्त के अधीन कुछ स्थिर बिन्दु प्रमेय स्थापित किये गये जो कि वाँग [19], फिशर [52], माशा [112], सिंह-काशाहारा [175] आदि के परिणामों को उन्नत करती हैं.

$$(*) \qquad d(Ax, By) \le a_1 d(Ax, Sx) + a_2 d(By, Ty) + a_3 d(Sx, By) + a_4 d(Ty, Ax) + a_5 d(Sx, Ty)$$

जहाँ समस्त $x, y \in M$, M एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा किसी $h \in \{1,2,3,4,5\}$ के लिए a_h गुणन समष्टि $X \times X$ पर वास्तविक फलन है.

प्रस्तुत अनुभाग में हम प्रतिबंध (*) का अध्ययन 2-दूरीक समष्टि में कर रहे हैं.

प्रमेय 4.1. मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है. मान लें A, B, S एवं T समष्टि X पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. यदि ऋणेतर संख्याओं $a_h \ge 0$ (जहाँ $h \in \{1,2,3,4,5\}$) का अस्तित्व ऐसा है कि X के प्रत्येक x, y, a के लिए

(4.1.1) $$d(Ax, By, a)$$

$$\leq a_1 d(Ax, Sx, a) + a_2 d(By, Ty, a) + a_3 d(Sx, By, a)$$

$$+ a_4 d(Ty, Ax, a) + a_5 d(Sx, Ty, a) \;;$$

(4.1.2) $a_3 + a_4 + a_5 < 1$, $a_1 + a_4 < 1$ एवं $a_2 + a_3 < 1$;

(4.1.3) S संतत है;

(4.1.4) $d(x, Tx, a) \leq d(x, Sx, a)$, $x, a \in X$;

(4.1.5) युगल {A, S} सुसंगत है;

(4.1.6) S एवं T के सापेक्ष क्रमशः एक उपगामितः A-नियमित अनुक्रम $\{x_n\}$ और उपगामितः B-नियमित अनुक्रम $\{y_n\}$ का अस्तित्व है;

तो A, B, S एवं T का एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

<u>उपपत्ति.</u> किन्हीं धन संख्याओं m एवं n के लिए (4.1.1) से

$$d(Ax_m, By_n, a)$$

$$\leq a_1 d(Ax_m, Sx_m, a) + a_2 d(By_n, Ty_n, a)$$

$$+ a_3 [d(Ax_m, Sx_m, a) + d(Ax_m, By_n, a)$$

$$+ d(Sx_m, By_n, Ax_m)] + a_4 [d(Ax_m, By_n, a)$$

$$+ d(By_n, Ty_n, a) + d(Ty_n, Ax_m, By_n)]$$

$$+ a_5[d(Ax_m, Sx_m, a) + d(Ax_m, By_n, a)$$

$$+ d(By_n, Ty_n, a) + d(Ax_m, By_n, Ty_n)$$

$$+ d(Sx_m, Ty_n, Ax_m)] .$$

अतः

(4.1.7) $$pd(Ax_m, By_n, a)$$

$$\leq qd(Ax_m, Sx_m, a) + rd(By_n, Ty_n, a)$$

$$+ a_3 d(Sx_m, By_n, Ax_m) + sd(Ty_n, Ax_m, By_n)$$

$$+ a_5 d(Sx_m, Ty_n, Ax_m) ,$$

जहां

$$p = (1 - a_3 - a_4 - a_5),\ q = (a_1 + a_3 + a_5),$$

$$r = (a_2 + a_4 + a_5),\ s = (a_4 + a_5) .$$

इसी प्रकार

$$pd(Ax_n, By_n, a)$$

$$\leq qd(Ax_n, Sx_n, a) + rd(By_n, Ty_n, a) + a_3 d(Sx_n, By_n, Ax_n)$$

$$+ sd(Ty_n, Ax_n, By_n) + a_5 d(Sx_n, Ty_n, Ax_n) .$$

अब त्रिभुजीय असमिका से

(4.1.8) $$d(Ax_m, Ax_n, a)$$

$$\leq d(Ax_m, By_n, a) + d(Ax_n, By_n, a) + d(Ax_m, Ax_n, By_n)$$

$$\leq (q/p)[d(Ax_m, Sx_m, a) + d(Ax_n, Sx_n, a)]$$

$$+(2r/p)\, d(By_n, Ty_n, a) + (a_3/p)[d(Sy_n, By_n, Ax_n)$$

$$+ d(Sx_m, By_n, Ax_m)] + (s/p)[d(Ty_n, Ax_m, By_n)$$

$$+ d(Ty_n, Ax_n, By_n)] + (a_5/p)[d(Sx_m, Ty_n, Ax_m)$$

$$+ d(Sx_n, Ty_n, Ax_n)] + d(Ax_m, Ax_n, By_n).$$

अब क्योंकि X के प्रत्येक a के लिए(4.1.7) से सीमा$_{m,n}$ $d(Ax_m, By_n, a) = 0.$

इसलिए सीमा$_{m,n}$ $d(Ax_m, By_n, Ax_n) = 0.$

अब (4.1.6) के प्रयोग से (4.1.8) द्वारा, n का सीमान्त मान लेने पर

$$\text{सीमा}_{m,n}\ d(Ax_m, Ax_n, a) = 0.$$

(मान लें)

अतः अनुक्रम $\{Ax_n\}$ कोशी है, यह अनुक्रम समष्टि X में किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा .

अब त्रिभुजीय असमिका से

$$d(Sx_n, z, a)$$

$$\leq d(Ax_n, Sx_n, a) + d(Ax_n, z, a) + d(Sx_n, z, Ax_n).$$

(4.1.5) से n का सीमान्त मान लेने पर $\{Sx_n\} \rightarrow z.$

इसी प्रकार $\{By_n\} \rightarrow z$, $\{Ty_n\} \rightarrow z.$

(4.1.3) से $\{S^2x_n\} \rightarrow Sz$, $\{SAx_n\} \rightarrow Sz$.

और (4.1.5) से $\{ASx_n\} \rightarrow Sz.$

अब पुनः (4.1.1) से

$$d(ASx_n, By_n, a)$$

$$\leq a_1 d(ASx_n, S^2x_n, a) + a_2 d(By_n, Ty_n, a)$$

$$+ a_3 d(S^2x_n, By_n, a) + a_4 d(Ty_n, ASx_n, a)$$

$$+ a_5 d(S^2x_n, Ty_n, a) .$$

n का सीमान्त मान लेने पर

$$d(Sz, z, a) \leq (a_3 + a_4 + a_5)\, d(Sz, z, a)\,.$$

जो (4.1.2) से एक विरोध है अतः $Sz = z$.

पुनः (4.1.1) से

$$d(Az, By_n, a)$$

$$\leq a_1 d(Az, Sz, a) + a_2 d(By_n, Ty_n, a) + a_3 d(Sz, By_n, a)$$

$$+ a_4 d(Az, Ty_n, a) + a_5 d(Sz, Ty_n, a)\,.$$

n का सीमान्त मान लेने पर

$$d(Az, z, a) \leq (a_1 + a_4) d(Az, z, a)\,.$$

(4.1.2) से

$$Az = z\,.$$

अब (4.1.4) से

$$d(z, Tz, a) \leq d(z, Sz, a) = 0, \text{ अतः } z = Tz.$$

पुनः (4.1.1) से

$$d(z, Bz, a) = d(Az, Bz, A) \leq (a_2 + a_3)\, d(z, Bz, a)\,,$$

जिससे $z = Bz.$

अतः z प्रतिचित्रणों A, B, S एवं T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

मान लें w प्रतिचित्रणों B एवं T का एक अन्य उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है. तब

$$d(z, w, a) = d(Az, Bw, a)$$

$$\leq a_1 d(Az, Sz, a) + a_2 d(Bw, Tw, a) + a_3 d(Sz, Bw, a)$$

$$+ a_4 d(Tw, Az, a) + a_5 d(Sz, Tw, a)$$

$$= (a_3 + a_4 + a_5)\, d(w, z, a),$$

जो कि (4.1.2) से एक विरोध है. अतः

$$w = z.$$

इसी प्रकार सिद्‌ध किया जा सकता है कि z प्रतिचित्रणों A एवं S का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

5

दुर्बल* क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु स्थिर बिंदु प्रमेय

फिशर [50] द्वारा 1979 में युसंसि का निम्न व्यापकीकरण प्रस्तुत किया गया :

प्रमेय 5.1. मान लें (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है तथा S एवं T समष्टि M पर स्व-प्रतिचित्रण हैं. तब S एवं T का समष्टि M में स्थिर बिंदु होगा यदि और केवल यदि एक संतत प्रतिचित्रण A का समष्टि M से $S(M) \cap T(M)$ पर ऐसा अस्तित्व हो कि जो S एवं T के साथ क्रमविनिमयी हो व समष्टि M के प्रत्येक x, y के लिए निम्न शर्त (*) को संतुष्ट करे:

(*) $$d(Ax, Ay) \leq p\,d(Sx, Ty), \text{ जहां } p \in (0, 1).$$

ऐसा प्रतीत होता है कि उक्त प्रमेय से प्रेरणा प्राप्त कर पाठक [137] ने क्रमविनिमेयता के स्थान पर दुर्बल* क्रमविनिमेयता (देखें परिभाषा 1.9) का प्रयोग करते हुए निम्न शर्त (**) के अधीन युसंसि का अन्य व्यापकीकरण प्रस्तुत किया.

मान लें R_+ ऋणेतर संख्याओं का समुच्चय है तथा (M, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि है. मान लें $H = \{h : R^5_+ \longrightarrow R_+ :$ उपरि सामिसंतत है तथा प्रत्येक चर में अह्रासमान है व प्रत्येक $t > 0$ के लिए $r(t) = h(t, t, a_1 t, a_2 t, a_3 t) < t$, जहां $a_1 + a_2 + a_3 = 4\}$ तथा M के प्रत्येक x, y के लिए

(**) $$d^2(Ax, Ay)$$

$$\leq h(d^2(Sx, Ty), d(Sx, Ax) \,.\, d(Ty, Ay),$$

$$d(Sx, Ay) \,.\, d(Ty, Ax), d(Sx, Ax) \,.\, d(Ty, Ax),$$

$$d(Sx, Ay) \,.\, d(Ty, Ay)) \,.$$

हमें निम्न प्रमेयिका की आवश्यकता होगी:

प्रमेयिका 1.1 [196]. प्रत्येक $t > 0$ के लिए $r(t) < t$ होगा यदि और केवल यदि $r^n(t) = 0$, जहां, r^n, r का n बार संयुक्त फलन है.

प्रस्तुत अनुभाग में हम प्रतिबंध (**) का अध्ययन 2-दूरीक समष्टि में कर रहे हैं.

प्रमेय 5.2. मान लें (X, d) एक पूर्ण 2-दूरीक समष्टि है जिसमें d संतत है. मान लें समष्टि X पर A एक मनमाना स्व-प्रतिचित्रण है तथा समष्टि X पर S एवं T स्व-प्रतिचित्रण ऐसे हैं कि निम्नलिखित शर्तें संतुष्ट होती हैं.

(5.2.1) दुर्बल* क्रमविनिमयी युगलों $\{A,S\}$ एवं $\{A,T\}$ का ऐसा अस्तित्व है कि $AX \subset SX \cap TX$;

(5.2.2) X में एक अनुक्रम $\{x_n\}$ का ऐसा अस्तित्व है जो A^2 के सापेक्ष क्रमशः उपगामितः S^2-नियमित एवं T^2-नियमित है;

(5.2.3) X के प्रत्येक x, y, a के लिए H में एक h ऐसा है कि

$$d^2(Ax, Ay, a)$$

$$\leq h(d^2(Sx, Ty, a), d(Sx, Ax, a) \cdot d(Ty, Ay, a),$$

$$d(Sx, Ay, a).\ d(Ty, Ax, a), d(Sx, Ax,$$

$$a).d(Ty, Ax, a), d(Sx, Ay, a).\ d(Ty, Ay, a));$$

(5.2.4) किसी $t > 0$ के लिए, $h(t, t, 0, ft, 0) \leq gt$, $h(t, t, 0, 0, ft) \leq gt$ जहां $f = 2$ के लिए $g = 1$ एवं $f < 2$ के लिए $g < 1$ और $r(t) = h(t, t, a, t, a_2t, a_3t) < t$, जहाँ, $a_1 + a_2 + a_3 = 4$.

तब A, S एवं T का एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

<u>उपपत्ति.</u> X में x_0 लें. क्योंकि $A(X) \subset S(X)$, $x_1 \in X$ इस प्रकार ले सकते हैं कि $A(x_0) = Sx_1$. इसी प्रकार , क्योंकि $A(X) \subset T(X)$, $x_2 \in X$ इस प्रकार है कि $Ax_1 = Tx_2$. व्यापक रूप में, हम X में अनुक्रम $\{x_n\}$ की रचना इस प्रकार कर सकते हैं कि

$$y_{2n} = Sx_{2n+1} = Ax_{2n}$$

और

$$y_{2n+1} = Tx_{2n+2} = Ax_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

<u>निश्चयात्मक</u> <u>कथन</u> <u>1.</u> $d_n(a) = d(y_n, y_{n+1}, a)$, $d_n(a) \rightarrow 0$ के लिए (5.2.3) से

$$(5.2.5) \quad d^2_{2n}(a) = d^2(Ax_{2n}, Ax_{2n+1}, a)$$

$$= d^2(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}, a)$$

$$\leq h(d^2_{2n-1}(a), d_{2n}(a). d_{2n-1}(a), 0,$$

$$d_{2n}(a)[d_{2n-1}(a) + d_{2n}(a) + R_{2n-1}], 0),$$

जहाँ. $R_{2n-1} = d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}, Ax_{2n+1})$.

अब यदि $R_{2n-1} > 0$, तब (5.2.5) में $a = Ax_{2n-1}$ रखने पर

$$R^2_{2n-1} < h(0, 0, 0, 2R^2_{2n-1}, 0)$$

$$\leq h(R^2_{2n-1}, R^2_{2n-1}, R^2_{2n-1}, 2R^2_{2n-1}, R^2_{2n-1})$$

$$< R^2_{2n-1},$$

जो एक विरोध है. अतः $R_{2n-1} = 0$.

पुनः (5.2.5) से

$$d^2_{2n}(a)$$

$$\leq h(d^2_{2n-1}(a), d_{2n}(a).\ d_{2n-1}(a), 0,$$

$$d_{2n}(a)[d_{2n-1}(a) + d_{2n}(a)], 0).$$

मान लें किसी n के लिए $d_n(a) > d_{n-1}(a)$. तब $d_{n-1}(a) + d_n(a) = fd_n(a), f < 2$ एवं h प्रत्येक चर में अह्रासमान है, इसलिए

$$d^2_{2n}(a) \leq h(d^2_{2n}(a), d^2_{2n}(a), 0, fd^2_{2n}(a), 0).$$

इसी प्रकार

$$d^2_{2n+1}(a) \leq h(d^2_{2n+1}(a), d^2_{2n+1}(a), 0, 0, fd^2_{2n+1}(a)).$$

किसी भी स्थिति में (5.2.4) से

$$d^2_n(a) \leq g d^2_n(a) < d^2_n(a) \text{ (चूँकि } g < 1);$$

जो एक विरोध है . अतः किसी n के लिए

$$d_{n-1}(a) > d_n(a).$$

पुनः

$$d^2_1(a) = d^2(Ax_1, Ax_2, a)$$

$$\leq h(d^2_0(a), d_0(a) \cdot d_1(a), 0, 0, [d_0(a) + d_1(a)].d_1(a))$$

$$\leq h(d^2_0(a), d^2_0(a), d^2_0(a), d^2_0(a), 2d^2_0(a))$$

$$= r(d^2_0(a)) \cdot$$

व्यापक रूप में,

$$d^2_n(a) \leq r^n(d^2_0(a)).$$

यदि $d_0(a) > 0$ तब प्रमेयिका 1.1 से

$$\text{सीमा}_n\ d^2_n(a) = 0 \text{ अर्थात् सीमा}_n\ d_n(a) = 0.$$

अब यदि $d_0(a) = 0$ तब स्पष्ट है कि प्रत्येक n के लिए $d_n(a) = 0$,

अतः

$$\text{सीमा}_n\ d_n(a) = 0.$$

<u>निश्चयात्मक</u> <u>कथन</u> <u>2.</u> जबकि $m = 0, 1, 2, \ldots\ldots,$

$$d_n(y_m) = 0.$$

स्पष्ट है कि $m = n+2$ के लिए उपरोक्त कथन सत्य है क्योंकि $R_n = 0$.

स्पष्टतया, यह कथन $m = n, n+1$ के लिए भी सत्य है. मान लें

$$m > n+1, \ m = n+p, \ p > 1.$$

अब यहां पर दो स्थितियों हैं:

1. जब m सम संख्या है.
2. जब m विषम संख्या है.

स्थिति 1.

$$d_n(y_m) \leq d_n(y_{m-1}) + d_{m-1}(y_n) + d_{m-1}(y_{n+1})$$

$$\leq d_n(y_{m-1}) + \{h(d^2_{m-2}(y_n),\ d^2_{m-2}(y_n),$$

$$d^2_{m-2}(y_n),\ 2d^2_{m-2}(y_n),\ d^2_{m-2}(y_n))\}^{1/2}$$

$$+ \{h(d^2_{m-2}(y_{n+1}),\ d^2_{m-2}(y_{n+1}),\ d^2_{m-2}(y_{n+1}),$$

$$2d^2_{m-2}(y_{n+1}),\ d^2_{m-2}(y_{n+1}))\}^{1/2}$$

$$\leq d_n(y_{n+p-1}) + \{h^{p-1}(d^2_n(y_n),\ d^2_n(y_n),$$

$$d^2_n(y_n),\ 2d^2_n(y_n),\ d^2_n(y_n))\}^{1/2}$$

$$+\ \{h^{p-1}(d^2_n(y_{n+1}),\ d^2_n(y_{n+1}),$$

$$d^2_n(y_{n+1}),\ 2d^2_n(y_{n+1}),\ d^2_n(y_{n+1}))\}^{1/2}$$

$$= d_n(y_{n+p+1}) + 2\ \{h^{p-1}(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\}^{1/2}$$

$$= d_n(y_{n+p-1}).$$

इसी प्रकार स्थति 2 के लिए सिद्ध किया जा सकता है कि

$$d_n(y_m) \le d_n(y_{n+p-1}).$$

अतः प्रत्येक m के लिए

$$d_n(y_m)$$

$$\le d_n(y_{n+p-1}) \le \ldots\ldots \le d_n(y_{n+1}) = 0.$$

अब यदि $m < n$, मान लें $n = n+t,\ t > 1.$

तब ,क्योंकि $d_{n+1}(a) \le d_n(a)$,

$$d_n(y_m) = d_{m+t}(y_m) \le d_{m+t-1}(y_m) \le \ldots\ldots$$

$$\le d_m(y_m) = 0.$$

<u>निश्चयात्मक</u> <u>कथन</u> <u>3.</u> $d(y_i, y_j, y_p) = 0$, जहां $i, j, p \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ व्यापकता की किसी भी हानि के बिना हम $j < p$ ले सकते हैं. मान लें $p = j + r \geq 1$. तब

$$d(y_i, y_j, y_{j+r})$$

$$\leq d(y_i, y_j, y_{j+r-1}) + d(y_i, y_{j+r-1}, y_{j+r})$$

$$+ d(y_{j+r-1}, y_j, y_{j+r}).$$

अन्तिम दो पद निश्चयात्मक कथन 2 से शून्य हो जाते हैं.

फलतः

$$d(y_i, y_j, y_{j+r})$$

$$\leq d(y_i, y_j, y_{j+r-1}) \leq \ldots\ldots$$

$$\leq d(y_i, y_j, y_j) = 0 \cdot$$

इस प्रकार यह कथन सिद्ध हुआ.

<u>निश्चयात्मक</u> <u>कथन</u> <u>4.</u> $\{y_n\}$ एक कोशी अनुक्रम है. क्योंकि सीमा$_n$ $d_n^{(2)} = 0$ इसलिए यह सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि $\{y_{2n}\}$ एक कोशी अनुक्रम है. मान लें ऐसा नहीं है, तब एक $\varepsilon > 0$ ऐसा है कि प्रत्येक पूर्णांक $2k$ के लिए पूर्णांक $2n(k)$ एवं $2m(k)$

$$2k \leq 2n(k) < 2m(k)$$

को संतुष्ट करते हुए इस प्रकार हैं कि किसी $a \in X$ के लिए

(5.2.6) $\quad d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) > \epsilon$.

प्रत्येक पूर्णांक 2(k) के लिए मान लें 2m(k), 2n(k) से अधिक न्यूनतम ऐसा पूर्णांक है जो (5.2.6) को संतुष्ट करता है. इस प्रकार

(5.2.7) $\quad d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) \leq \epsilon$.

तब प्रत्येक 2k के लिए

$$\epsilon < d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$

$$\leq d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) + d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2})$$

$$+ d(y_{2m(k)-2}, y_{2m(k)}, a)$$

क्योंकि मध्य पद (यहां तथा निम्नलिखित असमिका के वांये पक्ष में भी शून्य हो जाता है)और

$$d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-2}, a)$$

$$\leq d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-1}, a) + d(y_{2m(k)}, y_{2m(k)-1}, a)$$

$$+ d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)-2}, a) .$$

हमें ज्ञात है कि

$$\epsilon < d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$

$$\leq d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-2}, a) + d_{2m(k)-1}(a) + d_{2m(k)-2}(a).$$

अब (5.2.7) एवं निश्चयात्मक कथन 1 से

(5.2.8) $\text{सीमा}_k \; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a) = \varepsilon$.

त्रिभुजीय असमिका एवं निश्चयात्मक कथन 3 के प्रयोग से स्पष्ट है कि

$$|d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)| \leq d_{2m(k)-1}(a)$$

और

$$|d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}, a) - d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)|$$

$$< d_{2m(k)-1}(a) + d_{2n(k)}(a) .$$

क्योंकि (5.2.6) तथा (5.2.7) से, $k \to \infty$ पर

(5.2.9) $d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a) \to \varepsilon$

और

(5.2.10) $d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)-1}, a) \to \varepsilon$.

अब

$$d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a)$$

$$\leq d_{2n(k)}(a) + d(y_{2n(k)+1}, y_{2m(k)}, a)$$

$$+ d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, y_{2n(k)+1})$$

$$\leq d_{2n(k)}(a) + ch(d^2(y_{2n(k)}, y_{2m(k)-1}, a),$$

$$d_{2n(k)}(a). \; d_{2m(k)-1}(a), \; d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a).$$

$$d(y_{2m(k)-1}, y_{2n(k)+1}, a), d_{2n(k)}(a).$$

$$d(y_{2m(k)-1}, y_{2m(k)+1}, a), d(y_{2n(k)}, y_{2m(k)}, a).$$

$$d_{2m(k)-1}(a)\}^{1/2} .$$

k का सीमान्त मान लेने पर निश्चयात्मक कथन 1, (5.2.8), (5.2.9), (5.2.10), एवं ९ के प्रत्येक चर में अह्रासमान गुण और उपरि सामि संततय से

$$\varepsilon \leq \{h(\varepsilon^2, 0, \varepsilon^2, 0, 0)\}^{1/2} < r^{1/2}(\varepsilon^2) < \varepsilon$$

जो एक विरोध है, अतः अनुक्रम $\{Ax_n\}$ कोशी होगा और इसलिए समष्टि X की पूर्णता से X के किसी बिंदु z पर अभिसरित होगा. क्योंकि अनुक्रमों $\{Sx_{2n+1}\}$ एवं $\{Tx_{2n}\}$, $\{Ax_n\}$ के उपानुक्रम हैं इसलिए ये भी z पर अभिसरित होंगे. क्योंकि S एवं T संतत हैं. अतः

$$STx_{2n} \to Sz \text{ और } TSx_{2n+1} \to Tz .$$

अतः

$$d(STx_{2n}, TSx_{2n+1}, a) = d(SAx_{2n-1}, TAx_{2n}, a)$$

$$\leq d(SAx_{2n-1}, ASx_{2n-1}, a) + d(ASx_{2n-1}, ATx_{2n}, a)$$

$$+ d(ATx_{2n}, TAx_{2n}, a) + d(SAx_{2n-1}, TAx_{2n}, ASx_{2n-1})$$

$$+ d(ASx_{2n-1}, TAx_{2n}, ATx_{2n}) ,$$

दुर्बल* क्रमविनिमेयता से

$$(5.2.11) \qquad d(STx_{2n}, TSx_{2n+1}, a)$$

$$\leq d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a) + d(A^2x_{2n}, T^2x_{2n}, a)$$

$$+ d(SAx_{2n-1}, ATx_{2n}, a)$$

$$+ d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, TAx_{2n-1})$$

$$+ d(A^2x_{2n}, T^2x_{2n}, ASx_{2n-1})$$

और (5.2.3) से

$$d(ASx_{2n-1}, ATx_{2n}, a)$$

$$\leq \{h(d^2(S^2x_{2n-1}, T^2x_{2n}, a), d(S^2x_{2n-1}, ASx_{2n-1}, a).$$

$$d(T^2x_{2n}, ATx_{2n}, a), d(S^2x_{2n-1}, ATx_{2n}, a).$$

$$d(T^2x_{2n}, ASx_{2n-1}, a), d(S^2x_{2n-1}, ASx_{2n-1}, a).$$

$$d(T^2x_{2n}, ASx_{2n-1}, a), d(S^2x_{2n-1}, ATx_{2n}, a).$$

$$d(T^2x_{2n}, ATx_{2n}, a)\}^{1/2}$$

$$(5.2.12) \qquad \leq \{h(d^2(S^2x_{2n-1}, T^2x_{2n}, a), [d(S^2x_{2n-1}, SAx_{2n-1}, a)$$

$$+ d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a)]$$

$$[d(T^2x_{2n}, TAx_{2n}, a) + d(T^2x_{2n}, A^2x_{2n}, a)],$$

$$[d(S^2x_{2n-1}, TAx_{2n}, a) + d(T^2x_{2n}, A^2x_{2n}, a)].$$

$$[d(T^2x_{2n}, SAx_{2n-1}, a) + d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a],$$

$$[d(S^2x_{2n-1}, SAx_{2n-1}, a) + d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a)].$$

$$[d(T^2x_{2n}, SAx_{2n-1}, a) + d(S^2x_{2n-1}, A^2x_{2n-1}, a)],$$

$$[d(S^2x_{2n-1}, TAx_{2n}, a) + d(T^2x_{2n}, A^2x_{2n}, a)].$$

$$[d(T^2x_{2n}, TAx_{2n}, a) + d(T^2x_{2n}, A^2x_{2n}, a)])\}^{1/2}.$$

यदि $d(Sz, Tz, a) > 0$, तब n का सीमान्त मान लेने पर (5.2.11) से, (5.2.12) एवं (5.2.2) का प्रयोग करने पर

$$d(Sz, Tz, a)$$

$$\leq [h(d^2(Sz, Tz, a), 0, d^2(Sz, Tz, a), 0, 0)]^{1/2}$$

$$\leq r^{1/2}(d^2(Sz, Tz, a)$$

$$< d(Sz, Tz, a)$$

जो एक विरोध है, इसलिए $Sz = Tz$.

पुनः त्रिभुजीय असमिका से

$$d(SAx_{2n+1}, Az, a)$$

$$\leq d(SAx_{2n+1}, ASx_{2n+1}, a) + d(ASx_{2n+1}, Az, a)$$

$$+ d(SAx_{2n+1}, ASx_{2n+1}, Az) .$$

अब (5.2.3) एवं (A,S) की दुर्बल* क्रमविनिमेयता का प्रयोग करने पर

$$d(SAx_{2n+1}, Az, a)$$

$$\leq d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a) + \{h(d^2(S^2x_{2n+1}, Tz, a),$$

$$[d(S^2x_{2n+1}, SAx_{2n+1}, a) + d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a)].$$

$$d(Tz, Az, a), d(S^2x_{2n+1}, Az, a).[d(Tz, SAx_{2n+1}, a)$$

$$+ d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a)], [d(S^2x_{2n+1}, SAx_{2n+1}, a)$$

$$+ d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a)]. [d(Tz, SAx_{2n+1}, a)$$

$$+ d(S^2x_{2n+1}, A^2x_{2n+1}, a)], d(S^2x_{2n+1}, Az, a).$$

$$d(Tz, Az, a))\}^{1/2} + d(S^2x_{2n}, A^2x_{2n}, Az) \cdot$$

अब n का सीमान्त मान लेने पर (5.2.2) से

$$d(Sz, Az, a)$$

$$\leq \{h(d^2(Sz, Tz, a), d(Sz, Tz, a).\ d(Tz, Az, a),$$

$$d(Sz, Az, a).\ d(Tz, Sz, a), d(Sz, Sz, a).$$

$$d(Tz, Sz, a), d(Sz, Az. a).\ d(Tz, Az, a))\}^{1/2}$$

$$\leq \{h(0, 0, 0, 0, d^2(Sz, Az, a))\}^{1/2}$$

$$< r^{1/2}(d^2(Sz, Az, a))$$

$$< d(Sz, Az, a).$$

यह दर्शाता है कि $Sz = Az$, अतः $Az = Sz = Tz$.
अब

$$d(Az, Ax_{2n}, a)$$

$$\leq \{h(d^2(Sz, Tx_{2n}, a), d(Sz, Az, a).\ d(Tx_{2n}, Ax_{2n}, a),$$

$$d(Sz, Ax_{2n}, a).\ d(Tx_{2n}, Az, a), d(Sz, Az, a).$$

$$d(Tx_{2n}, Az, a), d(Sz, Ax_{2n}, a).$$

$$d(Tx_{2n}, Ax_{2n}, a))\}^{1/2}.$$

n का सीमान्त मान लेने पर

$$d(Az, z, a) \leq [h(d^2(Sz, z, a), 0, d(Sz, z, a),$$

$$d(z, Az, a), 0, 0)]^{1/2}$$

$$\leq r^{1/2}(d^2(z, Az, a)$$

$$< d(Az, z, a)$$

जो एक विरोध है इसलिए

$$z = Az = Sz = Tz .$$

अतः z प्रतिचित्रणों A, S एवं T का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

अब हम दिखायेंगे कि यह स्थिर बिंदु अद्वितीय है. मान लें X में एक अन्य बिंदु z_1 का अस्तित्व ऐसा है कि

$$z_1 = Az_1 = Sz_1 = Tz_1.$$

तब

$$d^2(z, z_1, a) = d^2(Az, Az_1, a)$$

$$\leq h(d^2(Sz, Tz_1, a), d(Sz, Az, a). d(Tz, Az_1, a),$$

$$d(Sz, Az_1, a). d(Tz_1, Az, a), d(Sz_1, Az_1, a).$$

$$d(Tz_1, Az, a), d(Sz, Az_1, a). d(Tz_1, Az_1, a))$$

$$\leq \phi(d^2(z, z_1, a), 0, d^2(z, z_1, a), 0, 0)$$

$$\leq r(d^2(z, z_1, a)$$

$$< d^2(z, z_1, a)$$

जिससे

$$z = z_1.$$

तृतीय अध्याय

मटकोवस्की संकुचन सिद्धांत

प्रस्तुत अध्याय में उन प्रतिचित्रण निकायों के लिए स्थिर एवं संपात समीकरणों के साधन प्राप्त किये गये हैं जो मटकोवस्की संकुचन सिद्धांत एवं युंक संकुचन सिद्धांत का व्यापकीकरण एवं एकीकरण करते हैं. इस अध्याय के दो अनुभाग हैं:

1. प्रारंभिकी

2. परिणाम

1

प्रारंभिकी

बासंसि के व्यापकीकरण के ध्येय से मटकोव्स्की [114]-[115] ने 1973 में एक प्रतिचित्रण निकाय के लिए n दूरीक समष्टियों के गुणन पर एक स्थिर बिंदु प्रमेय प्राप्त किया. सर्वप्रथम हम मटकोवस्की के अनुसरण पर आवश्यक संकेतों को उल्लेख कर रहे हैं:

मान लें $(c_{ik}^{(0)})$ एक वर्ग आव्यूह है, जहाँ $c_{ik}^{(0)}$, $i, k = 1, \ldots\ldots, n$ वास्तविक संख्याएं हैं. आव्यूहों $(c_{ik}^{(0)})$ का अनुक्रम आवर्ततः इस प्रकार पारिभाषित है:

$$(*) \quad c_{ik}^{(1)} = \begin{cases} a_{ik} \text{ जब } i = k \\ 1 - a_{ik} \text{ जब } i \neq k, \end{cases}$$

$$(**) \quad c_{ik}^{(t+1)} \begin{cases} c_{11}^{(t)} \; c_{i+1,\, k+1}^{(t)} + c_{i+1,1}^{(t)} \; c_{1,k+1}^{(t)} \text{ जब } i \neq k \\ c_{11}^{(t)} \; c_{i+1,\, k+1}^{(t)} - c_{i+1,1}^{(t)} \; c_{1,k+1}^{(t)} \text{ जब } i = k, \end{cases}$$

$$i, k = 1, \ldots\ldots, n-t-1, \; t = 0, 1, \ldots\ldots, n-2.$$

उल्लेख्य है कि $(c_{ik}^{(t)})$ एक $(n-t) \times (n-t)$ वर्ग आव्यूह है. निम्न प्रमेयिका वस्तुतः मटकोवस्की द्वारा प्रदत्त है (साथ ही देखें [31], [176]).

<u>प्रमेयिका</u> <u>1.1.</u> मान लें $c_{ik}^{(1)} > 0$, $i, k = 1, \ldots\ldots, n$. तब असमिका निकाय

$$(1.1.1) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k < r_i, \quad i = 1, \ldots\ldots, n$$

का एक धनात्मक साधन $r_i > 0$, $i = 1, \ldots\ldots, n$, होगा यदि और केवल यदि निम्न असमिकाएं संतुष्ट हों:

(1.1.2) $\quad c_{ii}^{(t)} > 0,\ i=1,\ldots\ldots,n+1-t,\ t=1,\ldots\ldots,n.$

मान लें (1.1.1) में पारिभाषित असमिका का $r_i,\ i=1,\ldots\ldots,n$ एक साधन है तथा

(1.1.3) $\quad h = \text{अधिकतम}_i (r_i \sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k).$

असमिकाओं (1.1.1) की समसंगता के आलोक में (1.1.3) सत्य है और $h \in (0,1)$. मान लें b एवं c ऐसी ऋणेतर संख्याएं हैं कि:

(1.1.4) $\quad 0 \leq 2b + 2c < 1-h.$

सुविधा के लिए मान लें $(u_1, u_2,\ldots\ldots,u_n) = u(1,n)$, $(u_{i1}, u_{i2},\ldots,u_{in}) = u_i(1,n)$, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots\ldots \times X_n$.

<u>मटकोवस्की</u> <u>प्रमेय</u> <u>[114]-[115]</u>

<u>प्रमेय</u> <u>1.2.</u> मान लें $(X_i, d_i),\ i=1,\ldots\ldots,n$, पूर्ण दूरीक समष्टियां हैं तथा $T_i : X \longrightarrow X_i,\ i = 1,\ldots\ldots,n.$ यदि $a_{ik},\ i,k = 1,\ldots,n$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि X_k के सभी अवयवों $x_k, y_k,\ k = 1,\ldots\ldots,n$ के लिए

(1.2.1) $\quad d_i(T_i(x(1,n)),\ T_i(y(1,n))) \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(x_k, y_k)$

और $c_{ii}^{(t)} > 0,\ i = 1,\ldots\ldots,n-t,\ t = 0,\ldots\ldots,n-1$, संतुष्ट हों तब समीकरण निकाय

(1.2.2) $x_i = T_i(x(1,n)),\ i = 1,\ldots,n,$
का एक अद्वितीय साधन $x_1,\ldots\ldots,x_n$ होगा, जहाँ $x_i \in X_i$, $i=1,\ldots\ldots,n$, तथा मनमाने स्थिर $x_i^0 \in X_i,\ i = 1,\ldots\ldots,n$ के लिए उत्तरोत्तर पुनरावृत्तिकों के अनुक्रम

(1.2.3) $x_i^{m+1} \quad = \quad T_i(x^m(1,n)), \quad m \quad = \quad 0,1,\ldots,$
$i=1,\ldots,n$ अभिसरित होते हैं और

(1.2.4) x_i = सीमा $_m$ $x_i^m,\ i=1,\ldots,n.$

उक्त प्रमेय मटकोवस्की संकुचन सिद्धांत (मसंसि) के नाम से जाना जाता है (देखें, [176]) एवं (1.2.1) को मटकोवस्की संकुचन शर्त कहा जाता है.

जरविक [31] ने बहुमानी प्रतिचित्रण निकायों के लिए मसंसि का विस्तारण एवं व्यापकीकरण किया जो अन्य परिणामों के साथ बहुमानी प्रतिचित्रणों के लिए नाडलर [119] के संकुचन सिद्धांत को भी अंतर्निहित करता है. मटकोवस्की उपपत्ति तकनीक का अनुसरण करते हुए जरविक [32] एवं रेड्डी-सुब्रमण्यम[142] ने क्रमशः एडेलस्टिन [44] एवं क्रासनोसेलस्की [100] के स्थिर, बिंदु प्रमेयों को दो प्रतिचित्रण निकायों के लिए सिद्ध किया. उल्लेख्य है कि मटकोवस्की प्रकार के स्थिर बिंदु प्रमेय फलनक समीकरणों के साधनों के लिए उपयोगी हैं.

दूरीक समष्टियों के कार्तीय गुणन पर प्रतिचित्रण निकायों हेतु कोमिनेक [99] के संपात प्रमेय, सिंह-कुलश्रेष्ठ [176] के स्थिर बिंदु प्रमेय, मसंसि तथा आईसेकी-शर्मा-शर्मा (देखें [78] व [82]) आदि के 2-दूरीक समष्टि में परिवर्त प्राप्त करना ही आगामी अनुभाग का प्रमुख उद्देश्य है. वस्तुतः 2-दूरीक समष्टि पर मटकोवस्की प्रकार के संकुचन प्रतिचित्रणों के अध्ययन का यह प्रथम प्रयास है.

2

परिणाम

प्रमेय 2.1. मान लें (X_i, d_i), $i = 1,\ldots,n$, पूर्ण 2-दूरीक समष्टियाँ हैं तथा $a_{ik}, b, c \geq 0$ $(i,k = 1,\ldots,n)$ प्रतिबंधों $(*), (**)$, (1.1.1), (1.1.3) एवं (1.1.4) द्वारा पारिभाषित हैं. मानलें प्रतिचित्रण निकाय P_i एवं $Q_i : X \longrightarrow X_i$, $i = 1,\ldots\ldots,n$, संकुचन शर्तों

$$(2.1.1) \qquad d_i(P_i(x(1,n)), Q_i(y(1,n)), p_i)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(x_k, y_k, p_k)$$

$$+ b[d_i(x_i, P_i(x(1,n)), p_i) + d_i(y_i, Q_i(y(1,n)), p_i)]$$

$$+ c[d_i(x_i, Q_i(y(1,n)), p_i) + d_i(P(x(1,n)), y_i, p_i)] ;$$

को सभी $(x(1,n), y(1,n), p_i) \in X \times X \times X_i$ के लिए संतुष्ट करते हैं तब X_i में ऐसे बिन्दुओं x'_i, $i=1,\ldots\ldots,n$ का अस्तित्व होता है कि

$$P_i(x(1,n)) = x_i = Q_i(x(1,n)).$$

उपपत्ति. प्रमेयिका 1.1.1 एवं (1.1.3) से धनात्मक संख्याएं $r_1, r_2,\ldots\ldots,r_n$ इस प्रकार छाँट सकते हैं कि

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \leq hr_i, \; i = 1,\ldots\ldots,n,$$

X_i में मनमाने x_i^{θ}, $i=1,\ldots\ldots,n$ के लिए अनुक्रम $\langle x_i^m \rangle$ निम्न प्रकार पारिभाषित करें:

$x_i^{2m+1} = P_i(x^{2m}(1,n))$ एवं $x_i^{2m+2} = Q_i(x^{2m+1}(1,n))$, $m = \theta, 1, 2, \ldots.$
चूंकि हम मान सकते हैं कि $d_i(x_i^{\theta}. x_i^1, p_i) \leq r_i$, $i = 1,\ldots.,n$; इसलिए

(2.1.1) द्वारा

$$d_i(x_i^1, x_i^2, p_i) = d_i(P_i(x^{\theta}(1,n)), Q_i(x^1(1,n)), p_i)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(x_k^{\theta}, x_k^1, p_k)$$

$$+ b[d_i(x_i^{\theta}, P_i(x^{\theta}(1,n)), p_i) + d_i(x_i^1, Q_i(x^1(1,n)), p_i)]$$

$$+ c[d_i(x_i^1, P_i(x^{\theta}(1,n)), p_i) + d_i(x_i^{\theta}, Q_i(x^1(1,n)), p_i)]$$

अर्थात्

(2.1.3) $$d_i(x_i^1, x_i^2, p_i)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(x_k^{\theta}, x_k^1, p_k)$$

$$+ b[d_i(x_i^{\theta}, x_i^1, p_i) + d_i(x_i^1, x_i^2, p_i)]$$

$$+ c[d_i(x_i^1, x_i^1, p_i) + d_i(x_i^{\theta}, x_i^2, p_i)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k + b[r_i + d_i(x_i^1, x_i^2, p_i)$$

$$+ c[r_i + d_i(x_i^1, x_i^2 1, p_i) + d_i(x_i^{\theta}, x_i^1, x_i^2)]$$
(चूंकि 2-दूरीक d_i त्रिभुजीय असमिका को संतुष्ट करता है) •

अब यदि $d_i(x_i^{\theta}, x_i^1, x_i^2) > \theta$. तब (2.1.3) में $p_i = x_i^{\theta}$ रखने पर

$$(1 - b)d_i(x_i^{\theta}, x_i^1, x_i^2) \leq \theta$$

अर्थात् $d_i(x_i^{\theta}, x_i^1, x_i^2) = \theta, \; i = 1, \ldots, n.$

अस्तु (2.1.3) द्वारा

$$d_i(x_i^1, x_i^2, p_i) \leq qr_i, \text{ जहाँ } q = (h + b + c)/(1 - b - c),$$

इसी प्रकार $d_i(x_i^2, x_i^3, p_i) \leq q^2 r_i$.

आगमनतः

$$d_i(x_i^m, x_i^{m+1} p_i) \leq q^m r_i, \text{ जहाँ } m = 1, 2, \ldots\ldots .$$

अतः $\{x_i^m\}$, $i = 1, \ldots\ldots, n$, कोशी अनुक्रम है अर्थात् X_i के प्रत्येक p_i हेतु $d_i(x_i^m, x_i^t, p_i) \longrightarrow \theta$ जैसे ही $m, t \longrightarrow \infty$. चूँकि समष्टियों की पूर्णता के कारण प्रत्येक $\{x_i^m\}$ का X_i में एक सीमा बिंदु होगा और इसे u_i मान लें, $i = 1, 2, \ldots, n$.

अब त्रिभुजीय असमिका से

$$d_i(u_i, P_i(u(1,n)), p_i) \leq d_i(u_i, x_i^{2m+2}, p_i)$$

$$+ d_i(P_i(u(1,n)), Q_i(x^{2m+1}(1,n)), p_i)$$

$$+ d_i(u_i, P_i(u(1,n)), x_i^{2m+2})$$

$$\leq d_i(u_i, x_i^{2m+2}, p_i) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(x_k^{2m+1}, u_k, p_k)$$

$$+ b[(d_i(u_i, P(u(1,n)), p_i) + d_i(x_i^{2m+1}, x_i^{2m+2}, p_i)]$$

$$+ c[d_i(x_i^{2m+1}, P_i(u(1,n)), p_i) + d_i(u_i, x_i^{2m+2}, p_i)]$$

और जैसे ही $m \to \infty$

$(1 - b - c)(d_i(u_i, P_i(u(1,n)), p_i) < \theta$ प्राप्त होता है, जिससे $u_i = P_i(u(1,n)), i = 1, \ldots\ldots, n.$ इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि $v_i = Q_i(u(1,n)), i=1,\ldots\ldots,n.$

अस्तु u_i समीकरणों $P_i(x(1,n)) = Q_i(x(1,n)) = x_i, i=1,\ldots\ldots,n$ का एक साधन है. यह साधन अद्वितीय है क्योंकि यदि $\bar{u}_i$ दूसरा संभावित साधन हो तो, चूंकि हम मान सकते हैं कि $d_i(u_i, \bar{u}_i, p_i) \leq r_i, i=1,\ldots\ldots,n,$ (2.1.1) से

$$d_i(u_i, \bar{u}_i, p_i) = d_i(P_i(u(1,n), Q_i(\bar{u}(1,n), p_i)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(u_k, \bar{u}_k, p_k) + b[d_i(u_i, P_i(u(1,n)), p_i)$$

$$+ d_i(\bar{u}_i, Q_i(\bar{u}(1,n)), p_i)] + c[d_i(\bar{u}_i, P_i(u(1,n)), p_i)$$

$$+ d_i(u_i, Q_i(\bar{u}(1,n)), p_i)] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(u_k, \bar{u}_k, p_k)$$

$$+ 2c d_i(u_i, \bar{u}_i, p_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k + 2c r_i \leq (h + 2c) r_i.$$

आगमनतः किसी धन पूर्णांक m के लिए

$$d_1(u_1, \bar{u}_1, p_1) \le (h + 2c)^m r_1 .$$

जिससे X_1 के प्रत्येक p_1 के लिए $d_1(u_1, \bar{u}_1, p_1) = 0$ प्राप्त होता है. क्योंकि $0 \le h + 2c < 1$, अस्तु $u_i = \bar{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$. उपपत्ति पूर्ण हुई.

<u>टिप्पणी</u> <u>2.1.1.</u> उपर्युक्त प्रमेय में $b = c = 0$, $P_i = Q_i$, $i=1, \ldots, n$, लें तो मटकोवस्की प्रमेय (देखें, प्रमेय 1.2) का 2-दूरीक परिवर्त प्राप्त होता है.

<u>टिप्पणी</u> <u>2.1.2.</u> उपर्युक्त प्रमेय में $b = c = 0$, $P_i = Q_i$, $i = 1$ लें तो आईसेकी [78], आईसेकी-शर्मा-शर्मा [82] से बेहतर परिणाम प्राप्त होते हैं

<u>टिप्पणी</u> <u>2.1.3.</u> उपर्युक्त प्रमेय में यदि $c = 0$ लें तो दो प्रतिचित्रण निकाय के लिए सिंह-कुलश्रेष्ठ [176] प्रमेय का 2-दूरीक समष्टि में विस्तारण प्राप्त होता है.

<u>प्रमेय</u> <u>2.2.</u> मान लें $A_1, A_2, \ldots, A_n$ मनमाने अरिक्त समुच्चय हैं एवं $X_1, X_2, \ldots, X_n$ क्रमशः d_i, $i=1, \ldots, n$, 2-दूरीक के साथ 2-दूरीक समष्टियां हैं तथा $a_{ik}, b, c \ge 0 (i,k=1, \ldots, n)$ प्रतिबंधो (*), (**), (1.1.1), (1.1.3) एवं (1.1.4) द्वारा पारिभाषित हैं. यदि प्रतिचित्रण निकाय P_i एवं $S_i : A \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$, शर्त (2.2.1) को संतुष्ट करते हों, $P_i(A) \subset S_i(A)$, $S_i(A) (\subset X_i)$ पूर्ण उपसमष्टियाँ हैं, $i = 1, \ldots, n$, तथा

(2.2.1) $$d_i(P_i(x(1,n)), P_i(y(1,n)), p_i)$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(S_k(x(1,n), S_k(y(1,n), p_k) + b[d_i(S_i(x(1,n)),$$

$$P_i(x(1,n)), p_i) + d_i(S_i(y(1,n)), P_i(y(1,n)), p_i)]$$

$$+ c[d_i(S_i(x(1,n)), P_i(y(1,n)), p_i) + d_i(S_i(y(1,n)), P_i(x(1,n)), p_i)];$$

जहां सभी $(x(1,n), y(1,n), p_i)$ कार्तीय गुणन $A \times A \times X_i$ के सदस्य हैं, तब समीकरण निकाय $P_i(x(1,n)) = Q_i(y(1,n)), i=1,\ldots\ldots,n,$ के A में साधन प्राप्त होते हैं.

उपपत्ति. प्रमेय 2.1 के समान धनात्मक संख्याएं $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$ इस प्रकार प्राप्त की जा सकती हैं कि

$$a_{ik}r_k < hr_i, \; i=1,\ldots\ldots,n.$$

चूंकि $P_i(A) \subset S_i(A)$. इसलिए A_i में मनमाने x_i के लिए A_i में $\{x_i^m\}$ एवं $S_i(A)$ में $\{z_i^m\}$ अनुक्रमों की रचना इस प्रकार की जा सकती है:

$$P_i(x^{2m}(1,n)) = S_i(x^{2m+1}(1,n)) = z_i^{2m+1}$$

एवं

$$P_i(x^{2m+1}(1,n)) = S_i(x^{2m+2}(1,n)) = z_i^{2m+2}, \; m = 0,1,2,\ldots\ldots.$$

चूंकि हम मान सकते हैं कि

$$d_i(z_i^1, z_i^2, p_i) \leq r_i, \; r_i \geq 1, \; i = 1,\ldots\ldots,n.$$

तब (2.2.1) से

(2.2.2) $$d_1(z_1^2, z_1^3, p_1) = d_1(P_1(x^1(1,n)),$$

$$P_1(x^2(1,n)), p_1) \leq \sum_{k=1}^{n} a_{1k} d_k(z_k^1, z_k^2, p_k)$$

$$+ b[d_1(z_1^1, z_1^2, p_1) + d_1(z_1^2, z_1^3, p_1)] + c[d_1(z_1^1, z_1^3, p_1)$$

$$+ d_1(z_1^2, z_1^2, p_1)] .$$

(2.2.3) $$d_1(z_1^2, z_1^3, p_1) \leq \sum_{k=1}^{n} a_{1k} d_k(z_k^1, z_k^2, p_k)$$

$$+ b[d_1(z_1^1, z_1^2, p_1) + d_1(z_1^2, z_1^3, p_1)] + c[d_1(z_1^1, z_1^2, p_1)$$

$$+ d_1(z_1^2, z_1^3, p_1) + d_1(z_1^1, z_1^2, z_1^3)]$$

(चूँकि 2-दूरीक d_1 त्रिभुजीय असमिका को संतुष्ट करते हैं).

यदि $d_1(z_1^1, z_1^2, z_1^3) > \emptyset$.तब (2.2.2) में $p_1 = z_1^1$ रखने पर

$$d_1(z_1^1, z_1^2, z_1^3) \leq \; . b \cdot d_1(z_1^1, z_1^2, z_1^3)$$

जिससे

$$d_1(z_1^1, z_1^2, z_1^3) = \theta, \text{क्योंकि } b < 1.$$

अस्तु (2.2.3) से

$d_1(z_1^2, z_1^3, p_1) \leq (h+b+c)/(1-b-c)\, r_1 = qr_1,$
जहाँ $q = (h+b+c)/(1-b-c)$.

इसी तरह

$$d_1(z_1^3, z_1^4, p_1) \leq q^2 r_1 .$$

आगमनतः

$$d_i(z_i^{2m+1}, z_i^{2m+2}, p_i) \leq q^m r_i, \quad m = 1,2.... .$$

अतः $\{z_i^m\}, i=1,.....,n$ कोशी अनुक्रम हैं. चूंकि समष्टि $X_i, i=1,.....,n$ के प्रत्येक उप-समच्चुय पूर्ण हैं इसलिए $\{z_i^m\}$ की $S_i(A)$ $i=1,.....,n$ में सीमा होगी, जिसे u_i, $i=1,.....,n$ कह सकते हैं. अब मान लें $S^{-1}u_i$, $i=1,...,n$ $v_i(1,n)$ एक बिंदु है. तब $S_i(v_i(1,n)) = u_i$.

अब (2.2.1) से

$$d_i(S_i(v_i(1,n)), P_i(v_i(1,n)), p_i)$$

$$\leq d_i(S_i(v_i(1,n)), P_i(x^{2m+2}(1,n)), p_i) + d_i(P_i(v_i(1,n)),$$

$$P_i(x^{2m+2}(1,n)), p_i) + d_i(S_i(v_i(1,n)), P_i(v_i(1,n)),$$

$$P_i(x^{2m+2}(1,n)) \leq d_i(S_i(v_i(1,n)), z_i^{2m+3}, p_i)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_k(S_k(v_k(1,n)), z_k^{2m+2}, p_k) + b[d_i(S_i(v_i(1,n)),$$

$$P_i(v_i(1,n)), p_i) + d_i(z_i^{2m+2}, z_i^{2m+3}, p_i)]$$

$$+ c[d_i(S_i(v_i(1,n)), z_i^{2m+3}, p_i)$$

$$+ d_i(z_i^{2m+2}, P_i(v_i(1,n)), p_i)]$$

$$+ d_i(S_i(v_i(1,n)), P_i(v_i(1,n), z_i^{2m+3}).$$

m का सीमांत मान लेने पर

$$(1-c)\, d_i(S_i(v_i(1,n)), P_i(v_i(1,n)), p_i)$$

$$\leq bd_i(S_i(u_i(1,n)), P_i(u_i(1,n)), P_i).$$

अतः

$$S_i(u_i(1,n)) = P_i(u_i(1,n)), \; i = 1,2,\ldots\ldots,n.$$

टिप्पणी 2.2.1. उपर्युक्त प्रमेय 2.2 में $b = c = \theta$, $A_i = X_i$ एवं $S_i(x(1,n) = x_i$ (जहां प्रत्येक $x_i \in A_i$, $i = 1,\ldots\ldots,n$) लिया जाय तब प्रमेय 1.2 का 2-दूरीक समष्टि में विस्तार प्राप्त होता है और यदि $i = 1$ लें तो आईसेकी-शर्मा-शर्मा([78], [82] से बेहतर परिणाम प्राप्त होते हैं.

टिप्पणी 2.2.2. कोमिनेक का संपात प्रमेय [99, प्रमेय 1] जो कि गोबेल [64] के संपात प्रमेय एवं मसंसि का व्यापकीकरण है, उपर्युक्त प्रमेय 2.2 में $b = c = \theta$ लेने पर प्राप्त किया जा सकता है.

टिप्पणी 2.2.3. उपर्युक्त प्रमेय 2.2 में $b = c = \theta$, $A_i = X_i$, $i=1$ लेने पर युंक संकुचन सिद्धांत [87] का संपाती भाग प्राप्त होता है.

<u>च तु र्थ अ ध्या य</u>

<u>2-बानाख समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय</u>

इस अध्याय में 2-बानाख समष्टि के संवृत अवमुख उपसमुच्चयों पर पारिभाषित क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु के अस्तित्व का अध्ययन किया गया है. इस अध्याय के अनुभाग हैं:

1. प्रारंभिकी

2. परिणाम

1

प्रारंभिकी

प्रोफेसर कियोसी आईसेकी [79]-[81] ने सर्वप्रथम 2-मानकित समष्टि पर पारिभाषित अविस्तारी प्रतिचित्रणों (यदि 2-मानकित समष्टि $(X, ||., .||)$ का K एक अवमुख समुच्चय है तो प्रतिचित्रण $T:K \longrightarrow X$ को अविस्तारी कहा जायेगा यदि K में प्रत्येक x, y एवं X के प्रत्येक z के लिए $||Tx - Ty, z|| \leq ||x - y, z||$) के लिए स्थिर बिंदुओं का अध्ययन किया. इसके बाद से 2-मानकित एवं 2-बानाख समष्टियों में कई स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये गये. उदाहरणार्थ देखें ([21], [38]- [39], [63] व [162]).

हाल ही में पाठक [138] ने बानाख़ समष्टि X के (अरिक्त) अवमुख संवृत उपसमुच्चय M पर पारिभाषित ऐसे क्रमविनिमयी स्व-प्रतिचित्रणों f एवं g का अध्ययन किया जो M के प्रत्येक x, y एवं $q \in (0, 1)$ के लिए निम्न संकुचन शर्त को संतुष्ट करते हैं:

$$(*) \qquad ||Fx - Fy||^2$$

$$\leq q \text{ अधिकतम } \{ ||Gx - Fx|| \, ||Gy - Fy||, \, ||Gx - Fy|| \, ||Gy - Fx||,$$

$$||Gx - Fx|| \, ||Gy - Fx||, \, ||Gx - Fy|| \, ||Gy - Fy|| \}.$$

प्रस्तुत अध्याय में हम प्रतिचित्रण शर्त (*) का अध्ययन 2-बानाख़ समष्टि में कर रहे हैं.

2

परिणाम

<u>प्रमेय 2.1.</u> मान लें (B, ||. , .||) एक 2-बानाख़ समष्टि है तथा M समष्टि B का संवृत अवमुख उपसमुच्चय है. मान लें प्रतिचित्रण F व G: $M \to M$ ऐसे हैं कि

(2.1.1) $FG = GF$;

(2.1.2) $F^2 = G^2 = I$, जहां I तत्समक प्रतिचित्रण है;

M के प्रत्येक x, y, a के लिए (0,1) में एक ऐसे नियतांक q का अस्तित्व है कि-

(2.1.3) $$||Fx - Fy, a||^2$$

$$\leq q \text{ अधिकतम } \{||Gx - Fx, a||\,||Gy - Fy, a||,\ ||Gx - Fy, a||\,||Gy - Fx, a||,\ ||Gx - Fx, a||\,||Gy - Fx, a||,\ ||Gx - Fy, a||\,||Gy - Fy, a||\};$$

M के किसी बिंदु x_1 के लिए एक अनुक्रम $\{Gx_n\}$ निम्नवत् पारिभाषित हैः

(2.1.4) $Gx_{n+1} = (1 - t)\,Gx_n + tFx_n,\ 0 < t < 1,\ n \geq 1$;

अनुक्रम $\{Gx_n\}$ के उपसमुच्चय M के किसी बिंदु u पर अभिसरित होने पर प्रतिचित्रणों F व G का एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होता है.

<u>उपपत्ति.</u> प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए (2.1.4) से

(2.1.5) $$\|Gx_{n+1} - FGu, a\|^2$$

$$\leq [(1 - t)\|Gx_n - FGu, a\| + t\|Fx_n - FGu, a\|]^2$$

$$\leq (1 - t)^2 \|Gx_n - FGu, a\|^2 + 2t(1 - t) \times$$

$$\|Gx_n - FGu, a\|\|Fx_n - FGu, a\| + t^2\|Fx_n - FGu, a\|^2.$$

(2.1.2) से

(2.1.6) $$\|Fx_n - FGu, a\|^2$$

$$\leq q \text{ अधिकतम } \{\|Gx_n - Fx_n, a\|\|G^2u - FGu, a\|,$$

$$\|Gx_n - FGu, a\|\|G^2u - Fx_n, a\|,$$

$$\|Gx_n - Fx_n, a\|\|G^2u - Fx_n, a\|,$$

$$\|Gx_n - FGx_n, a\|\|G^2u - FGu, a\|\}.$$

अब (2.1.2) व (2.1.6) का (2.1.5) में प्रयोग करने पर

(2.1.7) $$\|Gx_{n+1} - FGu, a\|^2$$

$$\leq (1 - t)^2 \|Gx_n - FGu, a\|^2 + 2t(1 - t)$$

$$\|Gx_n - FGu, a\| [\|Fx_n - Gx_n, a\|$$

$$+ \|Gx_n - FGu, a\|]$$

$$+ t^2 q \text{ अधिकतम } \{\|Gx_n - Fx_n, a\|$$

$$\|u - FGu, a\|, \|Gx_n - FGu, a\|$$

$$[\|u - Gx_n, a\| + \|Gx_n - Fx_n, a\|],$$

$$\|Gx_n - Fx_n, a\| [\|u - Gx_n, a\|$$

$$+ \|Gx_n - Fx_n, a\|],$$

$$\|Gx_n - FGu, a\| \|u - FGu, a\|\}.$$

चूँकि $\{Gx_n\} \longrightarrow u$ तथा $Gx_{n+1} - Gx_n = t(Fx_n - Gx_n)$,

इसलिए $\{Fx_n - Gx_n\} \longrightarrow 0$ तथा

(२.1.7) में n का सीमान्त मान लेने पर

$$||u - FGu, a||^2$$

$$\leq (1 - t)^2 ||u - FGu, a||^2 + 2t(1 - t) ||u - FGu, a||^2$$

$$+ t^2 q \text{ अधिकतम } \{0, 0, 0, ||u - FGu, a||^2\}$$

$$= (1 - t)^2 ||u - FGu, a||^2 + 2t(1 - t) \times$$

$$||u - FGu, a||^2 + t^2 q ||u - FGu, a||^2$$

$$= k ||u - FGu, a||^2 ,$$

जहाँ $k = [1 - (1 - q) t^2] < 1$.

स्पष्ट है कि

$$||u - FGu, a|| = 0$$

जो यह दर्शाता है कि u - FGu एवं M के सभी सदस्य रैखिकतः आश्रित हैं, क्योंकि समष्टि u में दो या इससे अधिक अवयव हैं. अतः u - FGu एवं a को रैखिकतः आश्रित होने के लिए u - FGu को अवश्य ही शून्य सदिश होना चाहिए. अतः

(2.1.8) $$FGu = u$$

अब (2.1.2) से

$(2.1.9) \quad Fu = F^2Gu = Gu.$

पुनः (2.1.1), (2.1.2) व (2.1.8) — (2.1.9) से

$$\|u - Fu, a\|^2 = \|F(Fu) - Fu, a\|^2$$

$$\leq q \text{ अधिकतम } \{0, \|u - Fu, a\|^2, 0, 0\}$$

$$= q \|u - Fu, a\|.$$

अब चूंकि $q < 1$, इसलिए $u = Fu$, और (2.1.9) से $u = Gu$; अर्थात् u प्रतिचित्रणों F एवं G का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है. अब यह दिखाना शेष है कि यह बिंदु अद्वितीय है.

मान लें F एवं G का एक अन्य स्थिर बिंदु v भी है. तब

$$\|u - v, a\|^2 = \|F^2u - F^2v, a\|^2$$

$$= \|F(Fu) - F(Fv), a\|^2$$

$$\leq q \{0, \|u - v, a\|^2, 0, 0\}$$

$$= q \|u - v, a\|^2.$$

इसलिए

$$\|u - v, a\| = 0$$

जिससे

$$v = u.$$

पं च म अ ध्या य

अविस्तारी प्रतिचित्रणों के पुनरावृत्तिकों का अभिसरण

इस अध्याय में 2-मानकित समष्टि में पुनरावृत्तिकों की अभिसरण संबंधी समस्या पर कुछ परिणाम दिये गये हैं. इसके अनुभाग निम्नवत् हैं:

1. प्रारंभिकी

2. परिणाम

1

प्रारंभिकी

ऐसा प्रतीत होता है कि मानकित्त समष्टि में संकुचन प्रतिचित्रणों का समारंभन प्रोफेसर एम० ए० क्रासनोसेलस्की [100] की निम्न प्रमेय से हुआ:

<u>प्रमेय</u> <u>1.1.</u> मान लें किसी मानकित्त समष्टि X में K एक अरिक्त पूर्ण अवमुख उपसमुच्चय है तथा P समष्टि X का एक संहत उपसमुच्चय है. मान लें प्रतिचित्रण $T : K \longrightarrow P$ संतत है तथा $S : K \longrightarrow X$ एक संकुचन प्रतिचित्रण है. यदि K के प्रत्येक x, y के लिए $Tx + Sy \in K$ तो K में एक ऐसा बिंदु u होगा कि $Tu + Su = u$.

तत्पश्चात रोअडेस [145], हिक्स-कुबिसेक [75] तथा कई अन्य गणितज्ञों (देखें, उदाहरणार्थ, [131], [139], [147], [149], [203]) ने दिखाया कि मानकित्त समष्टि के प्रतिचित्रण T के लिए यदि मान पुनरावृत्तिक अनुक्रम बिंदु z पर अभिसरित होता हो तो $Tz = z$, देखें [42], दूसरी ओर नैम्पती-सिंह [122] तथा नायडू-प्रसाद [121] ने देखा कि T के लिए अभिसारी इशिकावा पुनरावृत्तिक अनुक्रम [94] प्रतिचित्रण T के स्थिर बिंदु पर अभिसरित होता है. हाल ही में क्रासनोसेलस्की [100] की पुनरावृत्तिक विधि का विस्तारण करते हुए कुल्फर्टिग [103] ने बहुमानी प्रतिचित्रणों के लिए मान पुनरावृत्तिक विधि का अध्ययन किया. इन सभी परिणामों के आलोक में सिंह [172] ने इशिकावा प्रकार की पुनरावृत्तिक विधि की अवधारणा बहुमानी प्रतिचित्रणों के लिए प्रस्तुत की तथा स्थिर बिंदुओं के सन्निकटन संबंधी परिणाम दिये.

प्रस्तुत अध्याय में हम एकमानी प्रतिचित्रणों के लिए मान पुनरावृत्तिक विधि के अधीन पाठक [139] एवं यून- शर्मा [203] के परिणामों का विस्तार (देखें क्रमशः प्रमेय 2.1 एवं प्रमेय 2.2) 2-मानिकत्त समष्टि में कर रहे हैं.

2

परिणाम

इस अध्याय में मान लें $(N, \|\cdot,\cdot\|)$ 2-मानकित समष्टि है तथा X इसका संवृत अवमुख उपसमुच्चय है, जिसमें एक से अधिक अवयव हैं. हम X पर दो प्रतिचित्रणों के लिए रोडड्स [147] द्वारा अध्ययन किये गये इशिकावा पुनरावृत्तिकों के अभिसरण का अध्ययन कर रहे हैं.

मान लें $T_1, T_2 : X \longrightarrow X$, $x_0 \in X$ तथा

$$x_{2n+1} = (1 - c_n)\, x_{2n} + c_n T_1 x_{2n}$$

$$x_{2n+2} = (1 - c_n)\, x_{2n+1} + c_n T_2 x_{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

पुनश्च: (i) $c_0 = 1$ (ii) $c_n \in (0, 1)$, $n = 1, 2, \ldots.$,
(iii) $\text{सीमा}_n\ c_n = h > 0$

प्रमेय 2.1. मान लें T_1 एवं T_2 समुच्चय X से X पर संतत प्रतिचित्रण हैं तथा पूर्व पारिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$ किसी बिंदु z पर अभिसरित होता है. मान लें $q \in (0, 1]$ तथा X के सभी x, y, a के लिए

$$(2.1.1)\qquad \| T_1x - T_2y, a\| \le q\ \text{अधिकतम}\ \{\|x - y, a\|,$$

$$\frac{\|x - T_1x, a\|\ [1 - \|x - T_2y, a\|]}{1 + \|x - T_1x, a\|},$$

$$\frac{||x - T_2y, a||[1 - ||x - T_1x, a||]}{1 + ||x - T_2y, a||},$$

$$\frac{||T_1x - y, a||[1 - ||y - T_2y - a||]}{1 + ||T_1x - y, a||},$$

$$\frac{||y - T_2y, a||[1 - ||T_1x - y, a||]}{1 + ||y - T_2y, a||}\}.$$

यदि z एक प्रतिचित्रण का स्थिर बिंदु हो तो यह दूसरे का भी स्थिर बिंदु होगा.

उपपत्ति. मान लें X में एक बिंदु z ऐसा है कि सीमा $_n x_n = z$. मान लें $T_1z = z$. अब हम दिखाते हैं कि $z = T_2z$. शर्त (2.1.1) द्वारा

$$||z - T_2z, a||$$

$$\leq \quad ||z - x_{2n+1}, a|| + ||x_{2n+1} - T_2z, a||$$

$$\leq \quad ||z - x_{2n+1}, a|| + (1 - c_n) \quad ||x_{2n} - T_2z, a||$$

$$+ c_n ||T_1x_{2n} - T_2z, a||$$

$$\leq \quad ||z - x_{2n+1}, a|| + (1 - c_n) ||x_{2n} - T_2z, a||$$

$$+ c_n \; q \text{ अधिकतम } \{ ||x_{2n} - z , a||,$$

$$\frac{||x_{2n} - T_1x_{2n}, a||[1 - ||x_{2n} - T_2z, a||]}{1 + ||x_{2n} - T_1x_{2n}, a||},$$

$$\frac{||x_{2n} - T_2z, a||[1 - ||x_{2n} - T_1x_{2n}, a||]}{1 + ||x_{2n} - T_2z, a||},$$

$$\frac{||T_1x_{2n} - z, a||[1 - ||z - T_2z, a||]}{1 + ||T_1x_{2n} - z, a||},$$

$$\frac{||z - T_2z, a||[1 - ||T_1x_{2n} - z, a||]}{1 + ||z - T_2z, a||}\}.$$

अब चूँकि

$$||x_{2n} - T_1x_{2n}, a|| = ||x_{2n} - x_{2n+1}, a||/c_n$$

इसलिए

$$||z - T_2z, a||$$

$$\leq ||z - x_{2n+1}, a|| + (1 - c_n)\,||x_{2n} - T_2z, a||$$

$$+ qc_n \text{ अधिकतम } \{||x_{2n} - z, a||,$$

$$\frac{||x_{2n} - x_{2n+1}, a|| / c_n[1 - ||x_{2n} - T_2z, a||]}{1 + ||x_{2n} - x_{2n+1}, a||/c_n},$$

$$\frac{||x_{2n} - T_2z, a||[1 - ||x_{2n} - x_{2n+1}, a||/c_n]}{1 + ||x_{2n} - T_2z, a||},$$

$$\frac{||T_1x_{2n} - z, a||[1 - ||z - T_2z, a||]}{1 + ||T_1x_{2n} - z, a||},$$

$$\frac{||z - T_2z, a||[1 - ||T_1x_{2n} - z, a||]}{1 + ||z - T_2z, a||}\} .$$

अब इसमें T_1 की सांतत्य एवं (iii) का प्रयोग करते हुए n का सीमांत मान लेने पर

$$||z - T_2z, a|| \leq (1 - h)\ ||z - T_2z, a|| + hq \text{ अधिकतम } \{0,\ 0,\ \frac{||z - T_2z, a||}{1 + ||z - T_2z, a||},\ 0,\ \frac{||z - T_2z, a||}{1 + ||z - T_2z, a||}\}$$

अर्थात्

$$||z - T_2z, a|| \leq (1 - h)\ ||z - T_2z, a|| + \frac{hq\ ||z - T_2z, a||}{1 + ||z - T_2z, a||}$$

अर्थात्

$$||z - T_2z, a|| \leq -(1 - q)$$

जिससे

$||z - T_2z, a|| = 0$ क्योंकि $0 < q \leq 1$ और a समष्टि X का मनमाना अवयव है. अस्तु $z - T_2z$ एवं a रैखिकतः आश्रित हैं. चूँकि X में दो या इससे अधिक अवयव हैं. इसलिए ऐसा केवल तभी सम्भव है जब $z - T_2z$ एक शून्य सदिश हो. अतः $T_2z = z$.

इसी प्रकार $z = T_2z$ लेने पर $z = T_1z$ प्राप्त किया जा सकता है. उपपत्ति पूर्ण हुई.

प्रमेय 2.2. मान लें T_1 एवं T_2 समुच्चय X से X पर प्रतिचित्रण हैं तथा पूर्व पारिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$ किसी बिंदु z पर अभिसरित होता है. यदि $q \in (0, 1)$ तथा X के सभी x, y, a के लिए

$$(2.2.1) \quad ||T_1x - T_2y, a|| \le q \text{ अधिकतम } \{ ||x-y, a||, \frac{||y-T_2y, a||[1 + ||x-T_1x, a||]}{1 + ||x - y, a||}, \frac{||x - T_2y, a||[1 + ||x - T_1x, a|| + ||y - T_1x, a||]}{2(1 + ||x - y, a||)} \}.$$

तो z प्रतिचित्रणों T_1 एवं T_2 का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु होगा.

<u>उपपत्ति.</u> मान लें X में एक बिंदु z ऐसा है कि सीमा$_n$ $x_n = z$. हमें दिखाना है कि $T_1z = T_2z = z$.

त्रिभुजीय असमिका एवं (2.2.1) द्वारा

$$||z - T_2z, a||$$

$$\le ||z - x_{2n+1}, a|| + ||(1 - c_n) x_{2n} + c_nT_1x_{2n} - T_2z, a||$$

$$\le ||z - x_{2n+1}, a|| + ||(1 - c_n) ||x_{2n} - T_2z, a||$$

$$+ c_n ||T_1x_{2n} - T_2z, a||$$

$$\le ||z - x_{2n+1}, a|| + (1 - c_n) ||x_{2n} - T_2z, a||$$

$$+ c_nq \text{ अधिकतम } \{ ||x_{2n} - z, a||,$$

$$\frac{||z - T_2z, a|| [1 + ||x_{2n} - T_1x_{2n}, a||]}{1 + ||x_{2n}-z, a||},$$

$$\frac{||x_{2n}-T_2z, a|| [1+||x_{2n}-T_1x_{2n}, a|| + ||z-T_1x_{2n}, a||]}{2(1 + ||x_{2n}-z, a||)}\}$$

$$\leq ||z - x_{2n+1}, a|| + (1 - c_n) ||x_{2n} - T_2z, a||$$

$$+ c_n \, q \text{ अधिकतम } \{ ||x_{2n} - z, a||,$$

$$\frac{||z - T_2z, a|| [1 + ||x_{2n} - x_{2n+1}, a||/c_n]}{1 + ||x_{2n} - z, a||},$$

$$\frac{||x_{2n}-T_2z, a|| + [1+||x_{2n}-x_{2n+1}, a||/c_n + ||z-x_{2n}, a||]}{2(1 + ||x_{2n} - z, a||)}\}.$$

n का सीमांत मान लेने पर

$$||z - T_2z, a|| \leq (1 - h - hq) ||z - T_2z, a||$$

जिससे

$$||z - T_2z, a|| = 0$$

और

$$z = T_2z$$

इसी प्रकार

$$T_1 z = z.$$

अतः z प्रतिचित्रणों T_1 एवं T_2 का उभयनिष्ठ स्थिर बिंदु है.

ष ष्ठ अ ध्या य

स्थानतः अवमुख समष्टि में अविस्तारी प्रतिचित्रणों के स्थिर बिंदु

इस अध्याय में स्थानतः अवमुख समष्टि पर पारिभाषित अविस्तारी प्रतिचित्रणों के लिए एक स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किया गया है. यह अध्याय दो अनुभागों में विभाजित है:

1. संकेतन एवं परिभाषाएं

2. परिणाम

1

संकेतन एवं परिभाषाएं

मान लें E एक स्थानतः अवमुख सांस्थितिक सदिश समष्टि है. Q द्वारा ऐसे अर्धमानकितों के कुल को प्रदर्शित किया जाता है जो कि E की सांस्थिति उत्पन्न करते हैं. इस अध्याय में प्रयुक्त कुछ संकेत इस प्रकार हैं:

$$\delta(A) = \text{उच्चक} \{||x - y|| : x, y \in A, A \subseteq E\}$$

$$\delta_p(A) = \text{उच्चक} \{p(x - y) : x, y \in A, A \subseteq E\}$$

$$B_p[x, y] = \{y : p(x-y) \leq r\}$$

$$d_p(x, A) = \text{निम्नक} \{p(x-y) : y \in A \subseteq E\}$$

$$D_p(A, B) = \text{अधिकतम} [\text{उच्चक} \{d_p(a, B) : a \in A\}, \text{उच्चक} \{d_p(b, A) : b \in B\}]$$

उल्लेख्य है कि अर्धमानकित p द्वारा प्रेरित फलन D_p एक दूरीक है, देखें, हाउसडोर्फ [74].

<u>परिभाषा</u> <u>1.1.</u> <u>[101].</u> किसी वानाख़ समष्टि B के परिबद्ध अवमुख उपसमुच्चय K में प्रसामान्य विन्यास होता है यदि K के प्रत्येक एक से अधिक विंदुओं वाले अवमुख उपसमुच्चय S के लिए, S में एक ऐसे बिंदु x का अस्तित्व हो कि

$$\text{उच्चक}_{y \in S} ||x - y|| < \delta(S).$$

<u>परिभाषा</u> <u>1.2.</u> <u>[123].</u> किसी स्थानतः अवमुख समष्टि E के अवमुख उपसमुच्चय K में प्रसामान्य विन्यास होता है, यदि K के एक से अधिक विंदुओं वाले परिबद्ध अवमुख उपसमुच्चय W के लिए, W में एक ऐसे बिंदु x का अस्तित्व हो कि

उच्चक $p(x-y) < \delta_p(U)$,
$y \in U$

प्रसामान्य विन्यास पर विस्तृत अध्ययन के लिए ([11], [46], [67], [110], [164], [195], [197], [202], [204]) का अवलोकन करें.

किर्क [101] द्वारा 1965 में निम्न प्रमेय स्थापित किया गया:

<u>प्रमेय 1.1.</u> मान लें X एक स्वतुल्य बानाख समष्टि है तथा C प्रसामान्य विन्यास के साथ एक संवृत परिबद्ध अवमुख उपसमुच्चय है यदि $T : C \longrightarrow C$ एक अविस्तारी प्रतिचित्रण है. तब T में एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा.

उल्लेख्य है कि प्रमेय 1.1 की सभी शर्तें स्थिर बिंदु की प्राप्ति के लिए आवश्यक हैं. देखें [46]. यह प्रमेय तब भी सत्य है यदि C को बानाख समष्टि B का प्रसामान्य विन्यास के साथ अवमुख दुर्बलतः संहत उपसमुच्चय लिया जाय. दूसरी ओर यह प्रश्न वर्षों तक अनुत्तरित रहा कि क्या किसी बानाख समष्टि B के प्रत्येक दुर्बलतः संहत अवमुख उपसमुच्चय C पर पारिभाषित प्रत्येक अविस्तारी प्रतिचित्रण के स्थिर बिंदु का अस्तित्व (स्थिर बिंदु गुण) होता है ? हाल ही में प्रोफेसर डी० ई० एलफाख़ [3] द्वारा इस प्रश्न का नकारात्मक उत्तर निम्न उदाहरण प्रस्तुत करते हुए दिया गया:

<u>उदाहरण</u> <u>1.1.</u> मान लें X लीबेग समष्टि $L^1[0,1]$ है और $C = \{x \in L^1[0, 1] : 0 \leq x(t) \leq 2$ सर्वत्रप्रायः और $\int_0^1 x(t) = 1\}$

मान लें $T : C \longrightarrow C$ इस प्रकार पारिभाषित है:

$$(Tx)\, t = \begin{cases} \text{न्यूनतम } \{2, 2x(2t)\}, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \text{अधिकतम } \{0, 2x(2t-1) - 2\}, & 1/2 < t \leq 1, \end{cases}$$

तब C एक अवमुख और दुर्बलतः संहत उपसमुच्चय है तथा T एक ऐसा अविस्तारी प्रतिचित्रण है जो कि स्थिर बिंदु मुक्त है.

प्रमेय 1.1 की सहायता से निम्न परिणाम प्राप्त किया जा सकता है, जिसे ब्राउडर [15], गोहडे [68] एवं किर्क [101] ने स्वतंत्र रूप से प्राप्त किया था.

<u>प्रमेय</u> <u>1.2.</u> मान लें X एक समान अवमुख बानाख़ समष्टि है तथा C इसमे एक अरिक्त संवृत अवमुख उपसमुच्चय है. यदि $T : C \rightarrow C$ एक अविस्तारी प्रतिचित्रण है तब T का एक स्थिर बिंदु होगा.

1973 में गोबेल-किर्क-शीमी [65] ने व्यापकीकृत अविस्तारी प्रतिचित्रणों(ऐसे प्रतिचित्रण जो 1.3.1 को संतुष्ट करें) के लिए निम्न प्रमेय स्थापित की:

<u>प्रमेय</u> <u>1.3.</u> मान लें एक समान अवमुख बानाख़ समष्टि X का K एक अरिक्त, परिबद्ध संवृत अवमुख उपसमुच्चय हैं. यदि $T : K \longrightarrow K$ एक संतत प्रतिचित्रण ऐसा है कि K के प्रत्येक x , y के लिए संकुचन शर्तः

(1.3.1) $$||Tx - Ty||$$

$$\leq a_1 ||x - y|| + a_2 ||x - Tx|| + a_3 ||y - Ty||$$

$$+ a_4 ||x - Ty|| + a_5 ||y - Tx||.$$

संतुष्ट होती है जहां $a_i \geq 0$ एवं $\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$ है. तब T का K में एक स्थिर बिंदु होगा.

<u>परिभाषा</u> <u>1.3.</u> स्थानतः अवमुख समष्टि E के किसी उपसमुच्चय C पर पारिभाषित स्वप्रतिचित्रण T को अविस्तारी कहा जाता है यदि Q के प्रत्येक p एवं समुच्चय C के प्रत्येक x, y के लिए $p(Tx - Ty) \leq p(x - y)$ हो.

1982 में नैम्पली- सिंह- व्हिट फिल्ड [123] द्वारा स्थानतः अवमुख समष्टि में प्रमेय 1.3 का विस्तार इस प्रकार किया गयाः

<u>प्रमेय</u> <u>1.4.</u> मान लें E एक स्थानतः अवमुख समष्टि है तथा E में K एक दुर्बलतः संहत अवमुख उपसमुच्चय प्रसामान्य संरचना के साथ है. मान लें $T : K \longrightarrow K$ एक संतत प्रतिचित्रण ऐसा है कि Q के प्रत्येक p एवं X के प्रत्येक x, y के लिए

$$p(Tx - Ty)$$

$$\leq a_1 \, p(x-y) + a_2 p(x - Tx) + a_3 p(y - Ty)$$

$$+ a_4 \, p(x - Ty) + a_5 \, p(y - Tx)$$

संतुष्ट हो जहां $a_1 \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$ है. तब T के एक स्थिर बिंदु का अस्तित्व होगा.

<u>परिभाषा</u> <u>1.4.</u> <u>[70].</u> मान लें स्थानतः अवमुख समष्टि E में K एक संहत उपसमुच्चय है. बहुमानी प्रतिचित्रण $T : K \longrightarrow 2^K$ को अविस्तारी कहा जायेगा यदि Q के प्रत्येक p एवं K के प्रत्येक x, y के लिए

$$D_p(Tx, Ty) \leq p(x - y)$$

संतुष्ट हो

<u>प्रमेय</u> <u>1.5.</u> <u>[70].</u> मान लें E एक अर्धरवतुल्य स्थानतः अवमुख समष्टि है तथा E का K संवृत परिबद्ध अवमुख उपसमुच्चय प्रसामान्य संरचना के साथ है. यदि $T : K \longrightarrow 2^E$ एक बहुमानी प्रतिचित्रण ऐसा है कि

1.5.1. K के प्रत्येक x के लिए $T(x) \cap K \neq \phi$

1.5.2 K के किसी संवृत अवमुख उपसमुच्चय L के लिए $L(U) \cap L = \phi$. जहां सभी $U \in L$

1.5.3 L के सभी x, $y (x \neq y)$ के लिए

$$D_p(Tx \cap L, Ty \cap L) \leq p(x - y),$$

तो T का एक स्थिर बिंदु होगा.

उपर्युक्त प्रमेय आसाव - किर्क [6], किर्क [101], मार्किन [111] एवं नाड्लर [119] के परिणामों का विस्तारण करती है. अविस्तारी प्रतिचित्रणों के लिए विभिन्न विन्यासों में कई स्थिर बिंदु प्रमेय स्थापित किये गये, उदाहरणार्थ देखें ([1], [5], [7], [8], [11], [16], [38], [39], [66]-[68], [79], [106], [109], [113], [151], [157], [172]).

हाल ही में आवारि- लहरी [1] तथा लहरी-तिवारी [106] ने स्वतुल्य बानाख़ समष्टि के संवृत अवमुख परिबद्ध व प्रसामान्य संरचना वाले उपसमुच्चय K पर पारिभाषित स्व-प्रतिचित्रण T के लिए निम्न प्रतिबंध के अधीन स्थिर बिंदु प्राप्त किये:

(*) $||Tx - Ty|| \leq$ अधिकतम $\{||x - y||, ||x - Tx||, ||y - Ty||\}$

जहाँ सभी $x, y \in K$.

प्रस्तुत अध्याय में हम शर्त (*) का अध्ययन स्थानतः अवमुख समष्टि में कर रहे हैं.

2

परिणाम

प्रमेय 2.1. मान लें X एक अर्धस्वतुल्य स्थानतः अवमुख समष्टि है एवं K समष्टि X का एक अरिक्त, संवृत अवमुख परिबद्ध उपसमुच्चय प्रसामान्य संरचना के साथ है. मान लें $T : K \rightarrow K$ एक ऐसा प्रतिचित्रण है कि X के प्रत्येक x, y के लिए निम्न शर्तें संतुष्ट होती हैं:

(2.1.1) $p(Tx - Ty)$

$\leq$ अधिकतम $\{p(x - Tx), p(y - Ty), p(x - Tx)\}$;

(2.1.2) $\underset{y \in F}{\text{उच्चक}}\ p(y - Ty) \leq \delta_p(F)$;

जहाँ प्रत्येक F, K का वह अरिक्त संवृत अवमुख उपसमुच्चय है जो T द्वारा स्व-प्रतिचित्रित है.

तब T का K में एक स्थिर बिंदु होगा.

उपपत्ति. मान लें H, K के उन अरिक्त संवृत अवमुख उपसमुच्चयों का कुल है जो समुच्चय आविष्टि द्वारा क्रमित हैं एवं T द्वारा स्व-प्रतिचित्रित है. तब अर्धस्वतुल्यता से H की प्रत्येक श्रृंखला मे परिमित सर्वनिष्ठ गुण होगा. जार्न प्रमेयिका से H में एक अल्पिष्ठ अवयव F (मान लें) होगा. अब यदि F में केवल एक ही अवयव है तब हमारी उपपत्ति पूर्ण हुई. विलोमतः मान लें F में एक से अधिक अवयव है.

माना $A = \underset{y \in F}{\text{उच्चक}}\ p(Ty - y)$ ·

तब (2.1.2) से

$$A < \delta_p(F) \cdot$$

F के प्रत्येक x के लिए मान लें

$$v_x(F) = \text{अधिकतम } \{\underset{y \in F}{\text{उच्चक}}\ p(x - y), A\} \cdot$$

$$v(F) = \text{निम्नक } \{v_x(F) : x \in F\},$$

$$F_c = \{x \in F : \upsilon_x(F) = \upsilon(F)\},$$

अब हम यह दिखायेंगे कि F_c एक अरिक्त संवृत एवं अवमुख समुच्चय है.

मान लें किसी धन संख्या n और F के प्रत्येक x के लिए

$$F(x, n) = \{y \in F : p(x - y) \leq \upsilon(F) + 1/n\}$$

और

$$C_n = \bigcap_{x \in F} F(x, n) .$$

सर्वप्रथम हम यह दिखायेंगे कि समुच्चय C_n अरिक्त है. मान लें ऐसा नहीं है, तब F में x_1 एवं x_2 का अस्तित्व ऐसा होगा कि

$$F(x_1, n) \bigcap F(x_2, n) = \emptyset .$$

जिससे

(2.1.3) $p(x_1 - x_2) \geq \upsilon(F) + 1/n + \upsilon(F) + 1/n = 2\upsilon(F) + 2/n .$

अब चूँकि F के प्रत्येक x के लिए

$$\text{उच्चक}_{y \in F} \; p(x-y) \geq \delta_p(F)/2$$

जिससे

$$\upsilon_x(F) \geq \delta_p(F)/2$$

यह दर्शाता है कि

$$\upsilon(F) \geq \delta_p(F)/2.$$

अर्थात्

$$\delta_p(F) < 2\upsilon(F) + 2/n \cdot$$

अतः (2.1.3) से

$$p(x_1 - x_2) > \delta_p(F) .$$

जो एक विरोध है, चूँकि $x_1, x_2 \in F$.

अतः C_n अरिक्त है. यह सिद्ध किया जा सकता है कि C_n संवृत एवं अवमुख है और $C_{n+1} \subset C_n$.

अब हम यह सिद्ध करेंगें कि $F_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

मान लें $y \in F_c$, तब $\upsilon_y(F) = \upsilon(F)$

अत:

(2.1.4) $\quad$ अधिकतम $\{$उच्चक$_{x \in F}$ $p(y - x), A\} = \upsilon(F)$

जिससे

$$\text{उच्चक}_{x \in F}\ p(x - y) \leq \upsilon(F) \text{ तथा } A \leq \upsilon(F) \cdot$$

अब हमें यह सिद्ध करना है कि समस्त n एवं F के प्रत्येक x के लिए $y \in F(x,n)$. मान लें ऐसा केवल कुछ n एवं F में कुछ ही x के लिए सत्य है, तब $p(x - y) > (\upsilon(F) + 1/n)$ जो कि (2.1.4) का विरोध है इसलिए $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ जिससे $F_c \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.
मान लें $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. तब F के प्रत्येक x एवं समस्त n के लिए $y \in F(x,n)$, अतः उच्चक$_{x \in F}$ $p(x - y) \leq \upsilon(F)$. इससे $\upsilon_x(F) \leq \upsilon(F)$ परन्तु

$\upsilon(F) \leq \upsilon_x(F)$.

इसलिए $\upsilon_x(F) = \upsilon(F)$. अतः $y \in F_c$ या $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \subset F_c$.

इस प्रकार यह सिद्ध हुआ कि $F_c = \bigcap_{n=1}^{\infty} c_n$.

अतः F_c संवृत और अवमुख है तथा अर्धसर्वतुल्यता से अरिक्त है.

अब यह दिखाना शेष है कि $\delta_p(F_c) \leq \delta_p(F)$. क्योंकि K प्रसामान्य संरचना के साथ है और $A \leq \delta_p(F)$ इसलिए F में एक x का अस्तित्व ऐसा होगा कि $\upsilon_x(F) < \delta_p(F)$. मान लें $x_1, x_2 \in F_c$ तब

$$p(x_1 - x_2) \leq \upsilon_{x_1}(F) = \upsilon(F) \cdot$$

इसलिए

$$(2.1.5) \quad \delta_p(F_c) = \text{उच्चक}\{p(x_1 - x_2) : x_1, x_2 \in F_c\}$$

$$\leq \upsilon(F) \leq \upsilon_x(F) < \delta_p(F) \cdot$$

अब $x \in F_c$ और $y \in F$ के लिए $p(Tx - Ty)$

$$\leq \text{अधिकतम}\{p(x - y), p(Tx - x), p(Ty - y)\}$$

$$\leq \text{अधिकतम}\{p(x - y), \underset{y \in F}{\text{उच्चक}}\ p(Ty - y)\}$$

$$\leq \text{अधिकतम}\{\underset{y \in F}{\text{उच्चक}}\ p(x - y), A\}$$

$$= \upsilon_x(F) = \upsilon(F) \cdot$$

अतः $T(F) \subset B_p[Tx, \upsilon(F)]$.

स्पष्ट है कि

$$T(F \cap B_p[Tx, \upsilon(F)]) \subset F \cap B_p[Tx, \upsilon(F)] \; (\because T(F) \subset F).$$

चूँकि F अल्पिष्ठ अवयव है इसलिए

$$F \subset B_p[Tx, \upsilon(F)].$$

अतः

(2.1.6) $\underset{y \in F}{\text{उच्चक}}\ p(Tx - y) \leq \upsilon(F)$ '

अब

$\upsilon_{Tx}(F) =$ अधिकतम $\{\underset{y \in F}{\text{उच्चक}}\ p(Tx - y), A\}$

$\leq$ अधिकतम $\{\upsilon(F), A\}$, (2.1.6) से

$= \upsilon(F)$, क्योंकि $A \leq \upsilon(F)$.

अतः $\upsilon_{Tx}(F) \leq \upsilon(F)$ परन्तु सदैव $\upsilon(F) \leq \upsilon_{Tx}$ होता है इसलिए $\upsilon(F) = \upsilon_{Tx}(F)$. जो यह दर्शाता है कि $Tx \in F_c$.

इसलिए F का F_c एक ऐसा अरिक्त संवृत अवयव उपसमुच्चय है जो T द्वारा स्व-प्रतिचित्रित है. चूँकि (2.1.5) से $\delta_p(F_c) < \delta_p(F)$ इसलिए $F_c \subset F$. यह इस तथ्य का विरोध करता है कि F अल्पिष्ठ अवयव है. अतः F में एक से अधिक अवयव नहीं हो सकता.

निर्देश

1. J. Achari and B.K. Lahiri, A fixed point theorem, Riv.Mat. Univ. Parma 43 (1980), 161-165.

2. J.Achari and S.T.Patil, A note on a fixed point theorem in 2-metric space, Math. Edu.(Siwan), 22 (1988), 23-24.

3. D.E. Alspach, A fixed point free nonexpansive map, Proc.Amer.Math.Soc. 82 (1981), 423-424.

4. E.Andalafte and R.Freese, Existence of 2-segments in 2-metric spaces, Fund.Math. LX(1967), 201-208.

5. Dune E.Anderson, Merle D.Guay and K.L. Singh, Fixed and common fixed points in convex metric spaces, Jñānābha 18 (1988), 31-43.

6. N.A. Assad and W.A. Kirk, Fixed point theorems for setvalued mappings of contractive type, Pacific J.Math. 45 (1972), 553-562.

7. J.S. Bae, Studies on generalized nonexpansive maps, Ph.D. Thesis, Seoul National Univ., 1983.

8. J.B.Baillon, R.E. Bruk and S.Reich, On asymptotic behaviour of nonexpansive mappings and semigroups in Banach spaces, Houston J.Math. 4(1978), 1-9.

9. N.Bajaj, Some maps on unique common fixed points, Indian J.Pure Appl. Math. 15(1984) 843-848.

10. D.K.Basu, On a fixed point theorem in 2-metric space, Pure Math. Manuscript 6 (1987).

11. L.B. Belluce, W.A. Kirk and E.F. Steiner, Normal structures in Banach spaces, Pacific J. Math. 26, (1968), 443-440.

12. F.F. Bonsall, Lectures on some fixed point theorems of functional analysis, T.I.F.R., Bombay 1962.

13. D.Borsan, Some properties of compactness in a g-2-metric space, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. 3 (1986), 27-30.

14. D.W.Boyd and J.S.W.Wong, On nonlinear contractions, Proc.Amer.Math.Soc.20 (1969), 458-464.

15. F.E.Browder, Nonexpansive nonlinear operators in Banach spaces, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 54 (1965), 1041-1044.

16. A.Carbone and G.Marino, Fixed points and almost fixed points of nonexpansive maps in Banach spaces, Riv.Mat.Univ. Parma 13(1987), 385-393.

17. J.Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans.Amer.Math.Soc. 215 (1976), 241-251.

18. K.P.Chamola, Some contributions to fixed point theory in probabilistic metric spaces, D.Phil. Thesis, H.N.Bahuguna Gharwal University, Srinagar, 1989.

19. S.S.Chang, On common fixed point theorems for a family of Ø-contraction mappings,Math. Japon. 29 (1984), 527-536.

20. S.S.Chang and N.J. Huang, On the generalized 2-metric spaces and probablistic 2-metric spaces with applications to fixed point theory, Math. Japon. 34(6) (1989), 885-900.

21. Y.J. Cho, Linear mappings on linear 2-normed spaces, D.Phil, Thesis,Pusan National University, Korea, 1984.

22. Y.J. Cho, On existence of fixed points in 2-metric spaces, Pusan. Kyŏ.Math.J. 1 (1985), 81-88.

23. Y.J.Cho and R.W.Freese, Characterization of linear 2-normed spaces, Pacific J.Math.(1990).

24. Y.J.Cho, M.S.Khan and S.L.Singh, Common fixed points of weakly commuting mappings, Review of Research, Faculty of Science, Mathematics Series 16 (1988), 62-63.

25. Y.J.Cho and S.L.Singh, A coincidence theorem and fixed point theorems in Saks spaces, Kobe J. Math. 3 (1986), 1-6.

26. K.J.Chung, Common fixed point theorems of two mappings, Comment.Math.Univ.St. Pauli 24 (1975), 97-106.

27. K.J.Chung, Some common fixed point theorems, Math. Japon. 23 (1978), 401-408.

28. L.B.Ćirić, A generalization of Banach contraction principle, Proc. Amer.Math.Soc. 45 (1974), 267-273.

29. V.Conserva, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Publ.Inst.Math. (Beograd) 32(1982),37-43.

30. X.X.Cui, An investigation of normpreserving extensions of bounded bilinear functionals on 2-normed spaces and some other problems, Xingiang Univ. Natur. Sci. 5 (1988), 4-10.

31. S.Czerwik, A fixed point theorem for a system of multivalued transformations, Proc.Amer. Math. Soc. 55 (1976), 136-139.

32. S.Czerwik, Generalization of Edelstien fixed point theorem, Demonst. Math. 9(2)(1976), 281-285.

33. K.M.Das and K.V.Naik, Common fixed point theorems for commuting maps on a metric space, Proc.Amer.Math.Soc. 77 (1979), 369-373.

34. C.Diminnie, S.Gähler and A. White Jr., 2-Inner product spaces, Demonst. Math. 6 (1973), 525-536.

35. C.Diminnie, S.Gähler and A.White, Jr., Strictly convex linear 2-normed spaces, Math. Nachr.59 (1974),319-324.

36. C.Diminnie, S.Gähler and A.White, Jr., 2-Inner product spaces II, Demonst. Math. 10 (1977), 169-188.

37. C.Diminnie, S.Gähler and A.White,Jr.,Remarks on strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces, Math. Nachr. 88 (1979), 363-372.

38. C.Diminnie and A.White Jr., Nonexpansive mappings in 2-normed spaces, Math. Japon, 21 (1976), 197-200.

39. C.Diminnie and A.White Jr., Some geometric remarks concerning strictly 2-convex 2-normed spaces, Math.Sem.Notes, Kobe Univ. 6 (1978), 245-253.

40. M.L.Diviccaro, B.Fisher and S.Sessa, Common fixed point theorems with a rational inequality, Bull. Inst.Math. Acad.Sinica, 14 (1986), 277-285.

41. M.L.Diviccaro and S.Sessa, Some remarks on common fixed points of four mappings, Jnānābha, 15 (1985), 139-149.

42. W.G.Dotson, Jr., On Mann interative process, Trans. Amer.Math.Soc. 149 (1970), 65-73.

43. J.Dugundj and A.Granas, Fixed point theory, Vol.1, Monograf. Math. No. 61, Warszawa, 1982.

44. M.Edelstein, On fixed and perodic points under contraction mappings, J.London Math.Soc. 37 (1962), 74-79.

45. E.Faddel and G.Forner (Ed.), Fixed point theory, Lect. Notes Math. 886, Springer-Verlag, 1981.

46. D.G. de Figueiredo, Topics in nonlinear functional analysis, Lect. Notes Univ. Maryland, 1967.

47. B.Fisher, Results on common fixed points, Math. Japon. 22 (1977), 335-338.

48. B.Fisher, Common fixed point and constant mappings on metric spaces. Math.Sem.Notes, Kobe Univ. 5 (1977), 319-326.

49. B.Fisher, Common fixed point and constant mappings satisfying a rational inequality, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 6 (1978), 29-35.

50 B.Fisher, Mappings with a common fixed point, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 7 (1978), 81-84.

51. B.Fisher,Common fixed points of commuting mappings, Bull. Inst.Math.Acad.Sincia, 9 (1981), 399-406.

52. B.Fisher,Common fixed points of four mappings, Bull. Inst.Math.Acad.Sinica, 11 (1983), 103-113.

53. B.Fisher and M.L.Khan, Fixed points, Common fixed points and constant mappings, Studia Sci. Math. Hungri., 11 (1978), 467-470.

54. B.Fisher and S.Sessa, Some remarks on a fixed point theorem of T.Kubiak, Math. Publ.(Debrecen)37 (1990), 41-45.

55. I.Franic, Two results in 2-normed spaces, Glasnik Mat. 17 (37) (1982), 271-275.

56. R.Freese, A 2-metric characterization of Eulcidean plane, Math.Ann. 206 (1973), 285-294,

57. उमेश चन्द्र गैरोला, दूरीक एवं बानाख समष्टियों में संपात, स्थिर एवं संकर स्थिर बिन्दुओं का अस्तित्व, पी-एच०डी० शोध प्रबन्ध, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार, अगस्त 1990.

58. S.Gähler, 2-metrische Räume und ihre topologishe struktur, Math. Nachr. 26 (1963), 115-148.

59. S.Gähler, Lineare 2-normierte Räume, Math.Nachr. 28 (1964), 1-43.

60. S.Gähler, Über eine Zwischenrelation in 2-metrischen Räume, Math.Nachr. 29 (1965), 301-331.

61. S.Gähler, Über 2-Banach Räume, Math. Nachr. 42 (1969), 335-347.

62. A.Ganguly, On an extension of Iséki's fixed point theorem, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 10 (1982) 675-676.

63. A.Ganguly, Fixed point theorems on 2-Banach spaces, J.Indian Acad. Math. 4 (1982), 80-81.

64. K.Goebel, A Coincidence theorem, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér.Sci. Math. Astronom.Phys. 16 (1968), 733-735.

65. K.Goebel, W.A.Kirk and T.N.Shimi, A fixed point theorem in uniformly convex spaces, Boll. Un. Mat. Ital. 7 (1973), 67-75.

66. K.Goebel and T.Kuczumow, A contribution to the theory of nonexpanxive mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 70 (1978), 355-357.

67. K.Goebel and S.Reich, Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings, Marcel Dekker, New York, (1984).

68. D.Gohde, Zum prinzip der Konstaktiven Abbildung, Math. Nachr. 30 (1965), 251-258.

69. K.E. Grant, A 2-metric lattice structure, D.Phil. Thesis, Saint Louis University, 1968.

70. Merl D.Guay, K.L.Singh and J.H.M. Whitfield, Fixed points for multivalued mappings in locally convex spaces, Jñānābha 18 (1978), 45-54.

71. O.Hadžić, Foundation of fixed point theory, Institute Za Mathematika, Novi Sad, 1978.

72. O.Hadžić, Fixed point theory in topological vector spaces, Univ. Novi Sad, 1984.

73. O.Hadžić, Common fixed point theorems for family of mappings in complete metric spaces, Math. Japon. 29 (1984), 127-134.

74. F.Hausdorff, Set theory, Third Ed. Chelsea, New York, (1957).

75. T.L.Hicks and J.D.Kubicek, On Mann iteration process in Hilbert spaces, J.Math.Anal.Appl. 64 (1978),562-569.

76. C.Hsiao, A property of contractive type mappings in 2-metric spaces, Jñānābha 16 (1986), 223-239.

77. K.Iséki, Fixed point theorems in Banach spaces, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 2(1974), 11-18.

78. K.Iséki, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Math. Sem.Notes, Kobe Univ. 3 (1975), 133-136.

79. K.Iséki, On nonexpansive mappings in strictly convex linear 2-normed spaces, Math. Sem.Notes, Kobe Univ. 3 (1975), 125-129.

80. K.Iséki, Some applications of Banach type contraction principles, Math. Sem.Notes, Kobe Univ. 4 (1976), 211-214.

81. K.Iséki, Mathematics on 2-normed spaces, Math. Sem.Notes, Kobe Univ. 4 (1976), 161-174.

82. K.Iséki, P.L.Sharma and B.K.Sharma, Contraction type mappings on 2-metric spaces, Math. Japon. 21 (1976), 67-70.

83. K.Iséki and S.L.Singh, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J.Phys. Natur.Sci. 3B (1983), 32-34.

84. S.Ishikawa, Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 147-150.

85. V.I. Istrăţescu, Fixed point theory, An introduction, D.Reidel Publishing Company, Holland, 1981.

86. B.J. Jaing, Topological fixed point theory and applications, Springer-Verlag, Vol. 1411, 1989 .

87. G.Jungck, Commuting maps and fixed points, Amer. Math. Monthly 83 (1976), 261-263.

88. G.Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Internat. J.Math. Math. Sci. 9 (1986), 771-779.

89. G.Jungck, Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta, Proc. Amer.Math. Soc. 103 (1988), 977-983.

90. G.Jungck, Compatible mappings and common fixed points, (2), Internat.J.Math. Math. Sci. 11 (1988). 285-288.

91. H. Kaneko, Single valued and multivalued f-contractions, Boll. Un Mat. Ital. (6) (1985), 29-33

92. R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Cal. Math. Soc. 60 (1968), 71-76.

93. S.Kasahara, On some recent results on fixed points, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 6 (1978), 373-382.

94. M.S. Khan, On the convergence of sequences of fixed points in 2-metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 10 (1979), 1062-1067.

95. M.S. Khan, Commuting mappings and fixed points in uniform spaces, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Mat. XXIX 9-10 (1981), 499-507.

96. M.S. Khan and M.Imdad, A common fixed point theorem for a class of mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 14 (1983), 1220-1227.

97. M.S. Khan, M.Imdad and S.Swaleh, Asymptotically regular maps and sequences in 2-metric spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 27 (1985), 81-88.

×98. S.S.Kim, Linear 2-normed spaces, Ph.D. Thesis, Jinju (Korea), 1990.

99. Z.Kominek, A generalization of K.Goebel's and J.Matkowski's theorems, Univ. Sataskiw Katowicach Prace Nauk Prace Mat. 12 (1982), 30-33.

100. M.A.Krasnoselskii, Two remarks on the method of successive approximations, Uspehi Mat. Nauk 10 (1955), 123-127.

101. W.A.Krik, A fixed point theorem for mapping which do not increase distance, Amer. Math. Monthly 72 (1965), 1004-1006.

102. T.Kubiak, Common fixed points of pairwise commuting mappings, Math.Nachr. 118 (1984), 123-127.

103. Peter K.F. Kuhfitting, The mean-value iteration for set-valued mappings, Proc.Amer. Math. Soc. 80 (1980), 401-405.

104. C.Kulshrestha, Single-valued mappings, multivalued mappings and fixed point theorems in metric spaces, Ph.D. Thesis, Garhwal University, Srinagar, 1983.

105. विजयेन्द्र कुमार, दूरीक एवं 2-दूरीक समष्टियों में संपाती एवं स्थिर विंदु प्रमेय, पी-एच०डी० शोध प्रबन्ध, हेमवती नंदन वहुगुणा गढ़वाल विश्वविद्यालय, श्रीनगर, अक्टूबर 1990.

106. B.K.Lahiri and K.Tiwari, Generalization of a fixed point theorem, J.Nat.Acad.Math. 3 (1985), 43-46.

107. S.N.Lal and M.Das, Mapping with common invariant points in 2-metric spaces, Math.Sem.Notes, Kobe Univ. 8 (1980), 83-90.

108. S.N.Lal and A.K.Singh, An analogue of Banach contraction principle for 2-metric spaces, Bull. Austral. Math.Soc. 18 (1978), 137-143.

109. S.N.Lal and A.K.Singh, Invariant points of generalized nonexpansive mappings in 2-metric spaces, Indian J.Math. 20 (1978), 71-76.

110. L.C.Lim, Characterization of normal structure, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 313-319.

111. J.T.Markin, A fixed point theorem for setvalued mappings, Bull.Amer.Math.Soc. 74 (1963), 639-640.

112. S.Massa, Generalized contractions in metric spaces, Boll.Un.Mat.Ital. 4(10)(1974), 689-694.

113. M.Masso and D.Roux, A Fixed point theorem for generalized nonexpansive mappings, Boll. Un. Mat. Ital. A 15 (1978), 624-634.

114. J.Matkowski, Some inequalities and a generalization of Banach's principle, Bull.Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), 323-324.

115. J.Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Dissertations Mat.Vol. CXXVII, (Rozprawy) Warszawa, 1975.

116. K.Menger, Untersuchungen über allgemeine matrik, Math.Ann. 100 (1928), 74-163.

117. A.Miczko and B.Palczewski, Common fixed points of contractive type mappings in a 2-metric space, Math. Nachr. 124 (1985), 341-355.

110. L.C.Lim, Characterization of normal structure, Proc. Amer. Math. Soc. 43 (1974), 313-319.

111. J.T.Markin, A fixed point theorem for set valued mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 639-640.

112. S.Massa, Generalized contractions in metric spaces, Boll. Un. Mat. Ital. 4(10)(1974), 689-694.

113. S.Massa and D.Roux, A fixed point theorem for generalized nonexpansive mappings, Boll. Un. Mat. Ital. A 15 (1978), 624-634.

114. J.Matkowski, Some inequalities and a generalization of Banach's principle, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), 323-324.

115. J.Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Dissertationes Math. Vol. CXXVII. (Rozprawy) Warszawa, 1975.

116. K.Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik, Math. Ann. 100 (1928), 75-163.

117. A.Miczko and B.Palczewski, Common fixed points of contractive type mappings in a 2-metric space, Math. Nachr. 124 (1985), 341-355.

118. S.N.Mishra and S.L.Singh, Some results on coincidences and fixed points of hybrid contractions, Rostock Math. Kolloq. (1990).

119. S.B.Nadler Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J.Math. 30 (1969), 475-488.

120. S.V.R.Naidu and J.R.Prasad, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J.Pure Appl. Math. 17 (1986), 974-993.

121. S.V.R.Naidu and J.R.Prasad, Ishikawa iteration for a pair of maps, Indian J.Pure Appl. Math. 17 (2) (1986), 193-200.

122. S.A.Naimpally and K.L.Singh, Extensions of some fixed point theorems of Rhoades, J.Math.Anal. Appl. 96 (1983), 437-446.

123. S.A.Naimpally, K.L.Singh and J.H.M.Whitfield, Fixed points and closed to normal structure in locally convex spaces, Nonlinear Anal. and Appl. Marcel Dekker New York (1982), 203-221.

124. S.A.Naimpally, S.L.Singh and J.H.M. Whitfield, Coincidence theorems for hybrid contractions, Math. Nachr. 127 (1986), 177-180.

125. K.A.Narayan, P.S.Thapliyal and Virendra, Fixed point theorems in 2-metric spaces, Math. Student 51 (1983), 215-221.

126. J.L.Nelson and K.L.Singh, Remarks on selected fixed point theorems, Math.Japon.34 (1989), 81-82.

127. M.Newton, Uniform and strict convexity in linear 2-normed spaces, Ph.D. Thesis, Saint Louis University, 1979.

128. T.Okada, Coincidence theorems on L-spaces, Math. Japon. 26 (1981), 291-295.

129. B.G.Pachpatte, Fixed points for contraction type mappings on a 2-metric spaces, Proc.Mat.Acad. Sci. India Sec. A 48 (1978), 94-102.

130. B.G.Pachpatte, Common fixed points of two mappings satisfying a new contractive type condition, Indian J.Pure Appl.Math. 14 (1983), 497-501.

131. T.K.Pal and M.Maiti, Extensions of fixed point theorems of Rhoades and Ćirić, Proc. Amer. Math. Soc. 64 (1977), 283-286.

132. B.D.Pant, Fixed point theorems in probabilistic metric spaces, Ph.D.Thesis, Garhwal University, Srinagar, 1984.

133. S.Park, Fixed points of f-contractive maps, Rocky Mountain J.Math. 8 (1978), 743-750.

134. S.Park, A unified approach to fixed points of contractive maps, J.Korean Math.Soc. 16 (1980), 95-105.

135. S.Park and B.E.Rhoades, Some general fixed point theorems, Acta. Sci. Math. 42 (1980), 299-304.

136. H.K.Pathak, Some results on unique common fixed points, Ganita, 37 (1) (1986), 44-52.

137. H.K. Pathak, Weak* commuting mappings and fixed points, Indian J.Pure Appl.Math. 17 (1986), 201-211.

138. H.K.Pathak, Some fixed point theorems in Banach spaces for commuting mappings, Indian J.Pure Appl.Math. 17 (1986), 969-973.

139. H.K.Pathak, Some fixed point theorems on contractive mappings, Bull. Cal. Math. Soc. 80 (1988), 183-188.

140. B.Ram, Existance of fixed points in 2-metric spaces, Ph.D.Thesis, Garhwal University, Srinagar, 1982.

141. K.P.R.Rao, A fixed point theorem for nearly densifying maps in a 2-metric space, Indian J.Math. 30 (1988), 119-121.

142. K.B.Reddy and P.V.Subrahmanyam, Extensions of Krasnoselskii's and Matkowski's fixed point theorems, Funk. Ekv. 24 (1981), 67-83.

143. S.Reich, Kannan's fixed point theorem, Boll. Un. Mat. Ital. 4 (1971), 1-11.

144. S.Reich, Fixed point theory in Hilbert ball, Contemporary Mathematics 72 (1988), 225-232.

145. B.E. Rhoades, Fixed point theorems using infinite matrices, Trans. Amer. Math. Soc. 196 (1974), 161-176.

146. B.E.Rhoades, Remarks on a paper of Chung, Comment Math. Univ. St. Pauli XXV (2) (1976), 115-116.

147. B.E. Rhoades, Comments on two fixed point iteration methods, J.Math. Anal. Appl. 56 (1976), 741-750.

148. B.E.Rhoades, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), 256-290.

149. B.E.Rhoades, Extensions of some fixed point theorems of Ćirić, Maiti and Pal, Math.Sem. Notes, Kobe Univ. 6 (1978), 41-46.

150. B.E.Rhoades, Contraction type mappings on a 2-metric space, Math. Nachr. 91 (1979), 151-155.

151. B.E.Rhoades, Fixed point iterations of generalized nonexpansive mappings, J.Math. Anal. Appl. 21 (1988), 554-576.

152. B.E.Rhoades, S.Sessa and M.S.Khan, On common fixed points of compatible mappings in metric and Banach spaces, Internat.J.Math.Math.Sci. 11(2)(1988),375-392.

153. B.E.Rhoades, S.Sessa, M.S.Khan and M.D.Khan, Some fixed point theorems for Hardy- Rogers type mappings, Internat. J. Math. Math. Sci. 7 (1) (1984), 75-87.

154. B.E.Rhoades, S.Sessa, M.S.Khan and M.Swaleh, On fixed points of asymptotically regular mappings, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 43 (1987), 328-346.

155. B.E.Rhoades, S.L.Singh and C.Kulshrestha, Coincidence theorems for some multivalued mappings, Internat. J. Math. Math. Sci. 7 (1984), 429-434.

156. S.Sessa, On a weak commutativity condition of a mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math. (Beograd) 32 (46) (1982), 175-180.

157. S.K.Samnta, A abstract fixed point theorem for multivalued mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 20 (11) (1986), 1080-1082.

158. A.K.Sharma, A study of fixed points of mappings in metric and 2-metric spaces, Ph.D. Thesis, Delhi University, 1979.

159. A.K. Sharma, A generalization of Banach contraction principle to 2-metric spaces, Math. Sem. Notes, Kobes Univ. 9 (1979), 291-295.

160. B.K.Sharma and P.L.Sharma, Contraction type mapping on general 2-metric space, Tamkang J. Math. 7 (1976), 219-222.

161. M.R.Singh, Results on continuous mappings and fixed points in a 2-metric space using two metrices, J.Indian Acad. Math. 11 (1) (1989), 41-42.

162. M.R.Singh and A.K. Chatterjee, Fixed point theorems in 2-Banach spaces, Proc. Math. Soc. B.H.U. 3 (1987), 183-189.

163. S.L.Singh, On common fixed points of commuting mappings, Math.Sem. Notes, Kobe Univ. 5 (1977), 131-134.

164. S.L.Singh, Generalized diminishing orbitral diameteral sum, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 5 (1977),295-312.

165. S.L.Singh, Application of a common fixed point theorem, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 6(1978), 37-40.

166. श्याम लाल सिंह, 2-दूरीक समष्टि में स्थिर बिंदु प्रमेय एवं इसका अनुप्रयोग, विज्ञान भारती 1(1978) 21-26.

167. S.L.Singh, Some common fixed point theorems in L-spaces, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 7 (1979), 91-97.

168. S.L.Singh, Some contractive type principles on 2-metric spaces and applications, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 7 (1979), 1-11.

169. S.L.Singh, A common fixed point theorem in a 2-metric space, proc. Nat. Acad. Sci. India Sec.A 53 (1983), 107-112.

170. श्याम लाल सिंह, क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु हाल में स्थिर बिंदु प्रमेयों पर एक टिप्पणी, विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका, 26 (1983), 259-261.

171. S.L.Singh, Coincidence theorems, fixed point theorems and convergence of sequences of coincidence values, The Punjab Univ. J. Math. XIX (1986), 83-97.

172. S.L.Singh, Approximating fixed points of multivalued maps, J. Natur, Phys. Sci. 2B(1988), 51-61.

173. S.L.Singh, U.C. Gairola and R.Mehndiratta, A coincidence theorem for three systems of transformations, J.Indian Math. Soc. (1990).

174. S.L.Singh, K.S.Ha and Y.J.Cho, Coincidence and fixed points of nonlinear hybrid contractions, Internat. J.Math. Math. Sci. 12 (1989), 247-256.

175. S.L.Singh and S.Kasahara, On some recent results on common fixed points, Indian J.Pure Appl. Math. 13 (7) (1982), 757-761.

176. S.L.Singh and C.Kulshrestha, A common fixed point theorem for two systems of transformations, Pusan Kyŏ. Math. J. 2 (1986), 1-7.

177. एस0 एल0 सिंह एवं वी0 कुमार, उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिंदु प्रमेय, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 30(3) (1987), 169-174.

178. एस0 एल0 सिंह एवं वी0 कुमार, उपगामी क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु 2-दूरीक समष्टि में एक स्थिर बिंदु प्रमेय II, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 30 (4) (1987), 207-211.

179. एस0 एल0 सिंह , वी0 कुमार एवं ए0 गांगुली, 2-दूरीक समष्टि पर प्रतिचित्रण समूह के संपात तथा स्थिर बिंदु एवं अनुप्रयोग, विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका, 32(3) (1989), 17-38.

180. S.L.Singh and S.N.Mishra, Fixed point theorems in uniform spaces, Resultate der Math. 6 (1983), 202-206.

181. S.L.Singh, S.N.Mishra and B.D.Pant, General fixed point theorems in probabilistic metric uniform spaces, Indian J.Math. 29 (1987), 9-21.

182. S.L.Singh and K.A.Narayan, Coincidence theorems on 2-metric spaces, Nat. Acad. Sci. Letters 9 (1986), 19-22.

183. S.L.Singh and C.W.Norris, Common fixed point theorems in 2-metric spaces, Indian J.Math. 25 (2) (1983), 165-170.

184. S.L.Singh and B.D.Pant, Common fixed point theorems in probabilistic metric spaces and extension to uniform spaces, Honam Math. J. 6 (1984), 1-12.

185. S.L.Singh and B.D.Pant, Fixed point theorems for commuting mappings in probabilistic metric spaces, Honam Math. J. 5 (1983), 139-149.

186. S.L.Singh and B.Ram, A note on convergence of sequences of mappings and their common fixed points in a 2-metric space, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 9 (1981), 181-185.

187. S.L.Singh and B.Ram,Common fixed points of commuting mappings in 2-metric spaces, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 10 (1982), 177-208.

188. S.L.Singh and K.P.R.Rao, Coincidence and fixed points for four mappings, Indian J.Math. 31 (1989), 215-223.

189 S.L.Singh and B.M.L.Tiwari, A note on a recent generalization of Jungck contraction principle, J.UPGC, Acad. Soc. 3 (1986), 13-18.

190. S.L.Singh, B.M.L. Tiwari and V.K.Gupta, Common fixed points of commuting mappings in 2-metric spaces and an application, Math. Nachr. 95 (1980), 293-297.

191. S.L.Singh and Virendra, Coincidence theorems on 2-metric spaces. Indian J.Phy. Natur.Sci. 2B(13) (1982), 32-35.

192. S.L.Singh and Virendra, A note on a fixed point theorem of Park-Rhoades and Jungck contraction principle, J.UPGC. Acad. Soc. 3 (1986), 8-12.

193. S.L.Singh and Virendra, Relative asymptotic regularity and fixed points, Indian J.Math. 31 (1) (1989), 99-104.

194. S.L.Singh and J.H.M. Whitefield, Contractions and fixed points, Colloq. Math. 55 (1988), 219-228.

195. S.P.Singh, Lecture notes on fixed point theorems in metric and Banach spaces, Matscience, Madras, 1974.

196. S.P.Singh and B.A.Meade, Fixed point theorems in complete metric spaces, Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977), 49-53.

197. N.Theip and H.D.Veit, A note on closed to normal structure, Comment. Math. Univ. Carolinae 20 (1979), 29-36.

198. Virendra, Coincidence theorems and fixed point theorems on 2-metric spaces and applications, Nap.math. Sci. Rep. 10 (1985).

199. Virendra, Coincidence and fixed point theorems in 2-metric spaces, Ph.D. Thesis, Garhwal Univ., Srinagar, 1986.

200. C.C.Yeh, Common fixed point of continuous mappings in metric spaces, Publ. Inst. Math. (Beograd) 27 (41) (1980), 21-25.

201. A.White, 2-Banach spaces, Math. Nachr. 42(1969), 43-60.

202. C.S.Wong, Closed to normal structure and its applications, J. Functional Analysis 16 (1974), 353-358.

203. A.K.Yule and P.L.Sharma, Fixed point theorems on contractive mappings, Indian J. Pure Appl. Math. 13 (1982), 426-428.

204. J.P.Xie, Fixed point theorems for nonexpansive multivalued mappings in Banach spaces with normal structure, Kexue Tongbao 34 (1989), 163-165.

तकनीकी शब्द	TECHNICAL TERMS
अद्‌वितीय	Unique
अद्‌वितीयता	Uniqueness
अधिकतम	Maximum
अधीन	Under
अंतर्विष्ट	Contained in
अनंत	Infinity
अन्वेषण करना	Investigate
अनुक्रम	Sequence
अनुप्रयोज्य विश्लेषण	Applicable analysis
अनुक्रम-सीमा	Limit of a sequence
अर्धमानकित	Seminorm
अर्धस्वतुल्य	Semireflexive
अनुसरण करना	Follow
अभिकलित्र अभिलेखन	Computer graphic
अभिसरण	Convergence
अभिसरित	Converge
अमूर्त समुच्चय	Abstract set
अरिक्त समुच्चय	Nonempty set
अल्पिष्ठ	Minimal
अवमुख समुच्चय	Convex set
अवयव	Element
अविस्तारी	Nonexpansive
अस्तित्व	Existence
असमिका	Inequality
अह्रासमान	Nondecreasing
आगमनतः	Inductively
आलोक	View

आवर्तत:	Recurssively
आविष्टि	Inclusion
इष्टतमकारी सिद्धांत	Optimization theory
इष्टतम संचालन	Optimum control
इस प्रकार	Such that
इशिकावा पुनरावृत्तिक	Ishikawa iterates
उच्चक	Supremum
उन्नत	Improve
उपगामी क्रमविनिमयी	Asymptotically commuting
उपगामी नियमितता	Asymptotic regularity
उपप्रमेय	Corollary
उपपत्ति	Proof
उपरि सामिसंतत	Upper semicontinuous
उपसमष्टि	Subspace
उपानुक्रम	Subsequence
ऋणेतर	Nonnegative
एकीकृत	Unify
क्रीड़ा सिद्धांत	Game theory
कुल	Family
कोशी/2-कोशी	Cauchy/2-cauchy
क्रमविनिमयी	Commuting
क्रमविनिमेयता	Commutativity
गणितीय विज्ञान	Mathematical Science
गतिकीय तंत्र	Dynamical system

टिप्पणी	Remark
तत्समक प्रतिचित्रण	Identity mapping
द्विसंतत	Bicontinuous
दुर्बल क्रमविनिमयी	Weak commuting
दुर्बल* क्रमविनिमयी	Weak* commuting
दुर्बलतः संहत	Weakly compact
दूरीक	Metric
2-दूरीक	2-Metric
दूरीक समष्टि	Metric space
2-दूरीक समष्टि	2-Metric space
दूरीक समष्टियों का गुणन	Product of metric spaces
2-दूरीक समष्टियों का गुणन	Product of 2-metric spaces
निकाय	System
निर्देश	Reference
निम्न अर्धसंतत	Lower semicontinuous
निम्नक	Infimum
निरपेक्ष मान दूरीक	Absolute value metric
निश्चयात्मक कथन	Assertion
परिबद्ध	Bounded
परिमित सर्वनिष्ठ गुण	Finit intersection property
परिवर्त	Varient
पारिभाषित	Defined
पुनरावृत्तिक	Iteration
पूर्ण दूरीक समष्टि	Complete metric space
पूर्ण 2-दूरीक समष्टि	Complete 2-metric space

प्रतिचित्रण	Map/mapping/transformation
प्रमुख सैद्धांतिक उपकरण	Measure theoretical tool
प्रसामान्य संरचना	Normal structure
प्राकृतिक संख्याएं	Natural number
प्रायिकतात्मक	Probabilistic
प्रारंभिकी	Preliminaries
प्रेरित संस्थिति	Induced topology
फलन	Function
फलनक विश्लेषण	Functional Analysis
फलनक समीकरण	Functional equation
बहुमानी	Multivalued
2-बानाख़ समष्टि	2-Banach space
बीजिय संस्थिति	Algebric Topology
भूयो	Further
मनमाना	Arbitrary
मानकित समष्टि	Normed space
2-मानकित समष्टि	2-Normed space
मान पुनरावृत्तिक विधि	Mann iteration process
यदि और केवल यदि	If and only if (iff)
यादृच्छिक	Random
यूक्लिद् समष्टि	Euclidean space

रैखिकतः आश्रित	Linearly dependent
रैखिकतः स्वतंत्र	Linearly independent
लेबेग समष्टि	Lebesgue space
वास्तविक फलन	Real-valued function
विरोध/विरोधाभास	Contradiction
विशिष्ट दशाएं	Special case
विस्तारण/विस्तारित	Extension/extend
सादृश	Analogous
सन्निकटन सिद्धांत	Approximation theory
समपरिवेश समष्टि	Uniform space
समांगता	Homogeneity
समुच्चय गुणन	Product of sets
सर्वनिष्ठ	Intersection
सर्वत्र प्रायः	Every where
सीमांत मान	Limiting value
सीमा होगी	Has a limit
सीमा$_n$ (सीमा$_{n\to\infty}$)	Lim_n ($Lim_{n\to\infty}$)
सुसंगत प्रतिचित्रण	Compatible map
संकल्पना	Concept
संकुचन सिद्धांत	Contraction principle
संकुचित	Contractive
संकुचित प्रकार प्रतिचित्रण	Contractive type mapping
संकेतन	Notations
संतत/संततता	Continuous/continuity
संपात	Coincidence
संरेख	Collinear

संवृत	Closed
संहत	Compact
संस्थिति विज्ञान/सांस्थितिकी	Topology
सांस्थितिक समष्टि	Topological space
सांस्थितिकतः सदिश समष्टि	Topological vector space
स्थानतः अवमुख समष्टि	Locally convex space
स्थिर बिंदु	Fixed point
स्थिर बिंदु सिद्धांत	Fixed point theory
स्वतुल्य	Reflexive
त्रिभुज का क्षेत्रफल	Area of triangle

SUMMARY

of the thesis

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF ABSTRACT COINCIDENCE AND FIXED POINT EQUATIONS IN 2-METRIC, 2-BANACH AND TOPOLOGICAL VECTOR SPACES

Submitted to the
Gurukula Kangri Vishwavidyalaya, Hardwar
for the award of the degree
of

DOCTOR OF PHILOSOPHY

in

MATHEMATICS

By

DEVENDRA DUTT SHARMA
Department of Mathematics
Gurukula Kangri Vishwavidyalaya
Hardwar 249 404

Under the supervision of

Dr. SHYAM LAL SINGH
Professor and Head
Department of Mathematics
Gurukula Kangri Vishwavidyala
Hardwar 249 404

Enrolment No. 86010 January 1991

The thesis obeye the following scheme:

Chepter I

INTRODUCTION

2-Metric, 2-normed and 2-Banach spaces

Bancah contraction principle and its some generalizations

Jungck contraction principle

An indication of the work done in the subsequent chapters

Chapter II

FIXED POINT THEOREMS FOR CONTRACTIVE TYPE MAPPING ON 2-METRIC SPACES

Definition and examples

Fixed point theorems for two mappings

Fixed point theorems for mapping satisfying rational inequalities

Fixed point theorems for compatible meppings

Fixed point theorems for weak* commuting mappings

REFERENCES

TECHNICAL TERMS

SUMMARY

The concepts of linear 2-normed spaces and 2-metric spaces was investigated by K.Menger 1928 and S.Gähler in 1963/64. The notions of 2-normed and 2-metric are regarded as notion of the area consisting of non-collinear three points like notions of norms and metric regarded as notion of distance between two points. The area in the euclidean plane is uniquely determined by given three points. Therefore each 2-simplex has its area. This idea is easily generalized to higher dimensional figures.

The first chapter is introductory in nature and contains certain topological preliminaries to be used in the sequel.The intent of the second chapter is to give some generalizations of the well known Banach contraction principle on the setting of 2-metric spaces.

With a view to generalizing the Banach contraction principle Matkowski established a fixed point theorem for a system of transformations on a product of n metric spaces. The third chapter attempts to extend certain generalizations of this principle to 2-metric spaces. It appears that the Matkowski type contraction principles on 2-metric spaces are being studied for the first time.

The fourth chapter studies the existence of fixed points of a new class of commuting mappings on 2-Banach spaces. It is well-known that iterates of nonexpansive mappings need not converge to its fixed point. In the fifth chapter, we consider a certain class of nonexpansive mappings whose Mann sequence of iterates converges to their common fixed points. The last chapter is devoted to some fixed point theorems in locally convex spaces.

प्रकाशन

1. 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों में संपात एवं स्थिर बिंदु समीकरणों के साधन (एस० एल० सिंह के साथ) प्रकाशनार्थ प्रेषित (शोध पत्र की टंकित पृष्ठ संख्या 111).